Moniulotteiset aikasarjat kl 2011, HT 3, viikko 47

1. Osoita oikeaksi monisteen s. 14 mainittu tulos

$$a'\mathsf{MSE}(\tilde{Y})a \geq a'\mathsf{MSE}\left(\mathsf{E}\left(Y|X\right)\right)a$$

kaikilla dimensioltaan sopivilla vektoreilla a.

Vihje: Voit siirtyä tarkastelemaan lineaarikombinaatioita $a'Y$ ja $a'\tilde{Y}$ ja olennaisesti palauttaa tilanteen yksiulotteiseksi.

2. Tarkastellaan stationaarista VAR(p)–prosessia $y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \Omega\right)$, jossa Ω on positiivisesti definiitti.

(i) Johda lauseke lineaarikombinaation $a'y_t$ optimaaliselle ennusteelle $\mathsf{E}_{t-1}\left(a'y_t\right) = \mathsf{E}\left(a'y_t | y_{t-1-j},\ j \geq 0\right)$ ja ennustevirheen varianssille (tässä a on nollasta poikkeava $n \times 1$ vakiovektori).

(ii) Merkitään $\boldsymbol{y}_t = [y_t' \ \cdots \ y_{t-p+1}']'$. Käyttäen edellistä kohtaa osoita, että sv:n $\boldsymbol{y}_t$ kovarianssimatriisi $\mathsf{Cov}\left(\boldsymbol{y}_t\right) = \boldsymbol{\Gamma}_0$ (ks. monisteen s. 12) on epäsingulaarinen eli kääntyvä (tätä tulosta käytettiin HT:n 2.4 ratkaisussa).

Vihje: Tee kohdassa (ii) vastaoletus, että $\boldsymbol{\Gamma}_0$ on singulaarinen ja päättele, että tällöin on olemassa nollasta poikkeava vakiovektori $\boldsymbol{a} = [a_1' \ \cdots \ a_p']'$ (a_i $n \times 1$) siten, että $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{y}_t = 0$ (todennäköisyydellä yksi). Oleta ensin, että $a_1 \neq 0$ ja päättele edelleen, että lineaarikombinaation $a_1'y_t$ optimaalisen ennusteen ennustevirheen varianssi on nolla ja totea tämän olevan ristiriidassa edellisen kohdan tuloksen kanssa. Jos $a_1 = 0$, voidaan tapauksessa $a_2 \neq 0$ menetellä kuten edellä tapauksessa $a_1 \neq 0$ ja näin voidaan jatkaa induktiivisesti tapaukseen $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$ ja $a_p \neq 0$, jossa ristiriidan voi johtaa prosessin määrittely-yhtälön tai lineaarisen esityksen avulla. Tulos voidaan perustella myös muulla kuin edellä kuvatulla tavalla.

3. Perustele yksityiskohtaisesti monisteen s. 15 esitetty ennustevirheen keskineliövirhematriisiin lauseke $\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \Omega \Psi_j'$ ja, kun $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \Omega\right)$, samalla sivulla mainittu ennustevirheen normaalisuustulos.

Vihje: Vetoa jälkimmäisessä osassa sopivaan multinormaalijakauman ominaisuuteen.

4. Perustele monisteen liitteen s. 5 esitetty tulos, jonka mukaan polynomi $p\left(z\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ voidaan kirjoittaa

$$p\left(z\right) = p\left(1\right) + \left(1 - z\right) q\left(z\right),$$

jossa

$$q\left(z\right) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k, \quad b_k = -\sum_{j=k+1}^{m} a_j.$$

Huom.: Tulos yleistyy potenssisarjoille (eli tapaukseen $m = \infty$), kunhan tuloksessa esiintyvät potenssisarjat ovat hyvin määriteltyjä, minkä takaa monisteen liitteessä

A.4 mainittu ehto $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| < \infty$. Yleistykset edelleen matriisitapaukseen ovat suoraviivaisia ja niistä saadaan monisteen s. 19 käytetty tulos $\Psi(\mathsf{B}) = \Psi(1) + \Delta G(\mathsf{B})$.

Vihje: Yksi tapa ratkaista tehtävä perustuu siihen, että kaksi polynomia ovat samat, jos niiden kertoimet ovat samat.