Moniulotteiset aikasarjat sl 2011, HT 1, viikko 45

1. Olkoon $A = [a_{ij}]$ $n \times m$ matriisi ja $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$ sen normi (ks. Liite A.1). Osoita, että

(i) $\max |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{nm} \max |a_{ij}|$, jossa maksimit ovat yli arvojen $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$.

(ii) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$, kun B on $m \times l$ matriisi.

(iii) $A_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A$ alkioittain eli $a_{ij,N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} a_{ij}$ kaikilla $i = 1, ..., n$ ja $j = 1, ..., m$ jos ja vain jos $\|A_N - A\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (tässä $A_N = [a_{ij,N}]$ on jono $n \times m$ matriiseja).

Vihje: Kohdassa (ii) voi kirjoittaa $C = AB$ ja käyttää matriisitulon määritelmää sekä vektorien Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä $\left(\text{eli } |\sum_{i=1}^{m} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}\right)$.

2. (i) Osoita, että vec–operaattorille (ks. Liite A.1) pätee $\mathsf{vec}\,(ab') = b \otimes a$, kun a ja b ovat (pysty)vektoreita.

(ii) Osoita, että $\mathsf{vec}\,(ABC) = (C' \otimes A)\,\mathsf{vec}\,(B)$, kun matriisitulo ABC on määritelty.

Vihje: Kohdassa (ii) voi osittaa matriisin B sarakkeittain $B = [b_1 : \cdots : b_q]$ ja kirjoittaa $B = \sum_{i=1}^{q} b_i e_i'$, jossa $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ on i. yksikkövektori (dimensio $(q \times 1)$). Jatko sujuu käyttäen suoraviivaista matriisilaskentaa, jossa sovelletaan kohdan (i) tulosta, Kroneckerin tulon ominaisuuksia (ks. Liite A.5, mainittujen ominaisuuksien ensimmäistä laskusääntöä) ja (ilmeistä) tulosta $\mathsf{vec}\,(\sum_{i=1}^{q} D_i) = \sum_{i=1}^{q} \mathsf{vec}\,(D_i)$.

3. Oletetaan, että $n \times n$ matriisin A ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat erisuuria (ks. Liite A.2). Oletetaan matriisilaskennasta lisäksi tunnetuksi, että vastaavat ominaisvektorit ovat tällöin lineaarisesti riippumattomat (eli vapaat).

(i) Osoita, että matriisi A voidaan lausua muodossa $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa $\Lambda = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (diagonaalimatriisi) ja matriisin P $(n \times n)$ sarakkeet ovat A:n (lineaarisesti riippumattomat) ominaisvektorit. Totea tämän perusteella, että $A^N = P\Lambda^N P^{-1}$.

(ii) Oletetaan nyt, että A:n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Osoita , että tällöin $A^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ geometrisesti eli matriisin A^N alkioille $\left[A^N\right]_{ij}$ pätee $\left|\left[A^N\right]_{ij}\right| \leq Cr^N$, jossa $C < \infty$ ja $r < 1$.

Vihje: Kohdassa (i) ominaisarvon ja ominaisvektorin määrittely-yhtälöt (ks. Liite A.2). Kohdassa (ii) voi käyttää tehtävää 1.

Huom.: Kohdan (ii) tulos pätee myös ilman oletusta matriisin A ominaisarvojen erisuuruudesta. Tällöin kohdan (i) hajotelman paikalla on A:n Jordanin hajotelma (ks. Liite A.2).

Jatkuu ...

4. Tarkastellaan matriisia (ks. moniste s. 8)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \qquad (np \times np)\,,$$

jossa A_i on $n \times n$ matriisi $(i = 1, ..., p)$. Olkoon $\lambda \neq 0$ matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvo, jolloin siis $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$, jossa $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1' & \cdots & x_p' \end{bmatrix}' \neq 0$ on λ:aa vastaava ominaisvektori (x_i on $p \times 1$ vektori). Osoita, että yhtälö $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ on yhtäpitävä determinanttiyhtälön $\det\left(I_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda^{-j} A_j\right) = 0$ kanssa.

Vihje: Tarkastele yhtälöä $(\boldsymbol{A} - \lambda I_{np})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ja suorita vasemmalla kertolasku käyttäen ositettujen matriisien kertolaskukaavaa (ks. Liite A.5), minkä jälkeen voit johtaa mainitun determinanttiyhtälön.