

Sijoitustoiminnan matematiikka 14.6.2017

Erilliskoe 3h 30min

1. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on kolme arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$ ja arvopaperi 2 osake, jonka hinta hetkellä nolla on p . Arvopaperi 3 on osto-optio, jonka omistajalla on oikeus ostaa hetkellä yksi 1 osake hintaan p . Option hetken nolla hinta on q . Markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka ehdot ovat seuraavat. Hetkellä yksi arvopaperin omistajalle palautetaan siitä hetkellä nolla maksettu hinta. Jos osakkeen arvo hetkestä nolla hetkeen yksi on noussut, omistaja saa lisäksi yhden osakkeen kurssinousua vastaavan rahamäärän. Määrää arvopaperin hetken nolla arbitraasivapaat hinnat.

2. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on arvopaperit $1, \dots, N$. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$. Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Arvopaperin n lukumäärä markkinoilla on L_n ja hetken 1 arvo $S_n(1)$, $n = 1, \dots, N$. Oletetaan, että $|S_n(1)| \leq M$ melkein varmasti kaikilla $n = 1, \dots, N$, missä M on positiivinen vakio.

Markkinoilla on K toimijaa. Toimijan k utiliteettifunktio u_k on aidosti konkaavi, kaikkialla derivoituva ja aidosti kasvava, $k = 1, \dots, K$. Lisäksi

$$u_k(z) = -\frac{1}{2}z^2 + b_k z, \quad \forall z \leq b_k - 1,$$

missä b_k on positiivinen vakio, $k = 1, \dots, K$. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila, kunhan vakiot b_1, \dots, b_K ovat riittävän suuria.

3. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$. Odotustuottoa $r > i$ vastaava minimaalinen salkun tuottoasteen hajonta on $a(r - i)$, missä a on positiivinen vakio.

Lisätään markkinoille arvopaperi $N + 1$, jonka odotustuotto on suurempi kuin i ja tuottoaste stokastisesti riippumaton markkinoiden muiden arvopapereiden tuottoasteista. Olkoon $r > i$. Osoita, että syntyneillä markkinoilla on mahdollista konstruoida salkku, jonka odotustuotto on r ja hajonta hajonta pienempi kuin $a(r - i)$.

4. Kahden periodin finanssimarkkinoilla on kaksi arvopaperia. Arvopaperi 1 vastaa pankkitiliä, jonka vuosikorko on $i = 0$ molempina periodeina. Arvopaperi 2 on osake, jonka hinta hetkellä k on $S_2(k)$, $k = 0, 1, 2$. Oletetaan, että

$$S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 1 + \xi_1 \quad \text{ja} \quad S_2(2) = (1 + \xi_1)(1 + \xi_2),$$

missä ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1/2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 1/2) = 3/4.$$

Toimijan varallisuus on $V > 0$ hetkellä 0. Tämä sijoitetaan markkinoille 2 vuodeksi. Määrää optimaalinen toteutuneisiin osakkeen hintoihin perustuva omavarainen sijoitusstrategia, kun tavoitteena on maksimoida hetken 2 utiliteetin odotusarvo ja arvopapereiden lyhyeksimyynti on kielletty. Toimijan utiliteettifunktio u määräytyy ehdosta $u(z) = \log z$, $z > 0$ (sovitaan, että $u(z) = -\infty$ alueessa $z \leq 0$).

Stj. toiminnan matem. 14.6. -17

1. Optron helken 1 arvo on $S_3(1) = \max(S_2(1) - p, 0)$, missä $S_2(1)$ on osakkeen arvo. Jos uuden arvopaperin helken 0 hinta on x , niin helken 1 arvo on

$$S_4(1) = x + \max(S_2(1) - p, 0) = x + S_3(1) \Rightarrow$$

$$x = \mathbb{E}(\delta S_4(1)) = \frac{x}{1+i} + q \Rightarrow x = \frac{(1+i)q}{i}$$

2. Luennat, esimerkit 6.1.

3. Haj. 8, Lent. 4,

4. Oletaan w_1 osakkeen sijoitettava suhteellinen määrä rahasta mittattuna. Varallisuus helkellä 2 on

$$V(1+w_1 S_1)(1+w_2 S_2), \quad w_1, w_2 \in [0,1],$$

w_1 deterministinen, w_2 $\delta(S_2(1))$ -mittainen ($\delta(S_2(1)) = \delta(S_1)$).
 On siis maksimointi

$$\mathbb{E}(\log(V(1+w_1 S_1)(1+w_2 S_2)))$$

$$= \log V + \mathbb{E}(\log(1+w_1 S_1)) + \mathbb{E}(\log(1+w_2 S_2)).$$

Riippamatta S_1 istä ja w_1 istä on optimaalisista vektorista w_2 siten, että $\mathbb{E}(\log(1+w_2 S_2))$ maksimoidaan,

$$\mathbb{E}(\log(1+w_2 S_2)) = \frac{1}{4} \log\left(1 - \frac{w_2}{2}\right) + \frac{3}{4} \log\left(1 + \frac{w_2}{2}\right).$$

Maksimi saavutetaan, kun $w_2 = 1$, lyhyesti myyjäis ei synny. Saman $w_1 = 1$. Sijoitetaan siis V uusia osakkeita 2 vuodeksi