Sijoitustoiminnan matematiikka 17.5.2017
Erilliskoe 3h 30min

1. Finanssimarkkinoilla on kaksi arvopaperia. Toinen on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja toinen osake, jonka hinta hetkellä 0 on 1 ja arvo hetkellä 1 $S_2(1)$. Oletetaan, että

$$\mathbb{P}(S_2(1) = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(S_2(1) = 2) = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(S_2(1) = 3) = \frac{1}{6}.$$

a) Määrää kaikki markkinoiden tilahintavektorit (taustalla oleva todennäköisyyskenttä oletetaan kolmitilaiseksi).

b) Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka haltijalla on oikeus ostaa 1 eurolla yksi osake hetkellä 1. Määrää arvopaperin arbitraasivapaat hetken 0 hinnat.

2. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,$$

missä $\mu_1, \dots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^{K} \mu_k^{-1})^{-1}$. Alkuperäiset kokonaisvahinkomäärät $X_1, \dots, X_K$ ovat rajoitettuja satunnaismuuttujia. Oletetaan, että markkinat ovat tasapainotilassa. Olkoon $X = X_1 + \dots + X_K$. Osoita, että riippumatta alkupääomista tasapainohinnoittelija $\bar{\phi}$ määräytyy ehdosta

$$\bar{\phi} = \left(\mathbb{E}(e^{\mu X})\right)^{-1} e^{\mu X}.$$

3. Markkinoilla on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i = 0$ ja joukko riskillisiä arvopapereita. Riskillisten arvopapereiden odotustuotot eivät ole kaikki samoja ja tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä. Odotustuottoa $r \geq 1$ vastaava minimaalinen riskillisistä arvopapereista muodostetun salkun tuottoasteen varianssi on

$$\sigma^2(r) = r^2 - 2r + 2.$$

a) Toimija muodostaa bondeista ja riskillisistä arvopapereista CAP-mallin mukaisen optimaalisen salkun siten, että tuottoasteen varianssi on 1/2. Määrää salkun odotustuotto.

b) Oletetaan, että riskillisiä arvopapereita on kolme kappaletta ja että markkinasalkku on $(0.5, 0.3, 0.2)$. Toimija sijoittaa markkinoille 1000 euroa a-kohdan mukaisesti. Määrää markkinoiden arvopapereihin sijoitettavat rahamäärät.

4. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ ja osake, jonka mahdolliset arvot ovat α ja β, missä $0 < \alpha < \beta$. Osakkeen hetken 0 hinta on $S_2(0)$ ja hetken 1 arvo $S_2(1)$. Markkinat ovat arbitraasivapaat. Olkoon $X = \max(S_2(0), S_2(1))$.

Sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa yhtiö suorittaa hetkellä 1 vakuutetulle määrän X, mikäli tämä on tällöin elossa. Olkoon τ vakuutetun jäljellä oleva elinaika ja

$${}_kp_y = \mathbb{P}(\tau \geq y + k \mid \tau \geq y), \quad y \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oletetaan, että τ on riippumaton finanssimarkkinoiden arvopapereista. Määrää keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva optimaalinen hetkellä 0 muodostettava salkku, kun vakuutettu on tällöin x-ikäinen.

Sijoitustoiminnan matematiikka 17.5.-17

1. a) Vaatimus on

$$\begin{cases} 1 = \psi_1+\psi_2+\psi_3 \\ 1 = \phantom{\psi_1+{}} 2\psi_2+3\psi_3 \end{cases}$$

ja $\psi_1, \psi_2, \psi_3 > 0$. Ratkaisu on

$$\{(\psi_1, 2-3\psi_1, 2\psi_1-1) \,;\, \psi_1 \in (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3})\}.$$

b) $S_3(1) = \max(S_2(1)-1, 0) = \begin{cases} 1, & \text{jos } S_2(1)=2 \\ 2, & \text{jos } S_2(1)=3 \end{cases}$

ja $S_3(1)=0$ muuten. AV-hinnat ovat

$$\{(2-3\psi_1) + 2(2\psi_1-1) \,;\, \psi_1 \in (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3})\}$$

$$= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}).$$

2. Seurauksen 9.5 nojalla $\bar{\phi}$ toteuttaa ehdot

$$u'_k(U_k - \bar{X}_k) = h_k \bar{\phi}, \quad h_k > 0, \quad k=1,\dots,K.$$

Siis

$$e^{-\mu_k (U_k - \bar{X}_k)} = h_k \bar{\phi}$$

ja

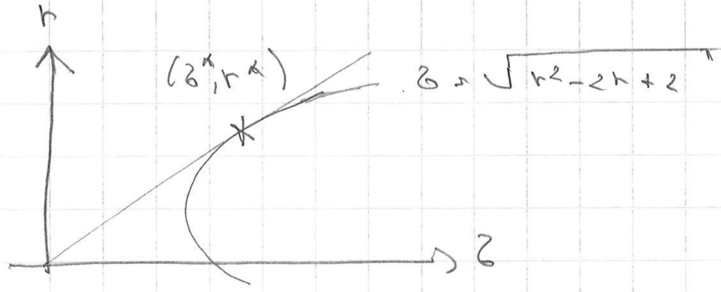
$$U_k - \bar{X}_k = -\frac{\log h_k}{\mu_k} - \frac{\log \bar{\phi}}{\mu_k}$$

$\Rightarrow$ $U - \bar{X} = -C - \mu^{-1} \log \bar{\phi}$, C on vakio, $U = \sum_{k=1}^{K} U_k$,

$\Rightarrow$ $\bar{\phi} = e^{\mu(\bar{X} - U - C)} = e^{\mu \bar{X}} \cdot D$, D vakio

Koska $E(\bar{\phi}) = 1$, on $D = E(e^{\mu \bar{X}})^{-1}$.

3.



a) $z^2 = r^2 - 2r + 2$, $2z = 2rr' - 2 \Rightarrow$ $r' = \frac{z}{r-1}$

Tangentin yhtälö : $r - r^\alpha = \frac{z^\alpha}{r^\alpha - 1}(z - z^\alpha)$. Koska $r = 0$, on

$-r^\alpha = -\frac{(z^\alpha)^2}{r^\alpha - 1}$, lisäksi $(z^\alpha)^2 = (r^\alpha)^2 - 2r^\alpha + 2$, joten

$r^\alpha = 2$, $z^\alpha = \sqrt{2}$ ja tangentin yhtälö on $r = \sqrt{2}\, z$.

Jos $z^2 = \frac{1}{2}$, on odotustuotto $r = 1$.

b) Bondin sijoitettava osuus w määräytyy ehdosta

$$w \cdot 1 + (1-w) r^\alpha = 1 \text{ eli } w = \frac{1}{2}.$$

Bondiin 500, arvopapereihin 2, 3, 4 määrät 250, 150, 100.

4. Jos bondille $S_1(1) = 1$, $S_1(0) = \frac{1}{1+i}$, niin on minimoitava

$$\mathbb{E}\left(\left(X\, 1(T > 1) - \Theta_1(1) - \Theta_2(1) S_2(1)\right)^2\right).$$

Tämä on luentojen mukainen asetelma, vaikka oli $i \neq 0$. AV merkitsee sitä, että $S_2(0) \in \left(\frac{\alpha}{1+i}, \frac{\beta}{1+i}\right)$, harj. 2, teht. 1 ja 2.

a) $S_2(0) \le \alpha$. Tällöin $X = S_2(1)$ on toistettavissa salkulla $(0,1)$. Optimaalinen suojaus on ${}_1p_x\,(0,1)$ (Lause 9.1).

b) $S_2(0) > \alpha$. Jos $q = P(S_2(1) = \alpha)$, niin

$$\mathbb{E}\left(\left(X - \Theta_1(1) - \Theta_2(1) S_2(1)\right)^2\right) = q\left(S_2(0) - \Theta_1(1) - \Theta_2(1)\alpha\right)^2 + (1-q)\left(\beta - \Theta_1(1) - \Theta_2(1)\beta\right)^2.$$

Tämä on $= 0$, kun $\Theta_2(1) = \frac{\beta - S_2(0)}{\beta - \alpha}$, $\Theta_1(1) = \beta - \beta\Theta_2(1)$. Salkku toistaa X:n, ja optimaalinen suojaus on tämä salkku kerrottuna ${}_1p_x$:llä.