

## Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 8, 3.5.2017

1. Olkoon markkinoilla kolme riskillistä arvopaperia. Olkoon näitä vastaava odotustuotovektori  $\bar{r} = (0.05, 0.1, 0.1)^T$ . Tuottoasteiden kovarianssimatriisi on

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Määrää kaikki tehokkaita salkkuja vastaavat varianssi-/odotustuottoparit sekä minimaalinen varianssi, joka salkuilla voidaan saavuttaa.

2. (jatkoa) Lisätään markkinoille nollakuponkibondi vuosikorolla  $i \geq 0$ . Määrää  $i$ , kun syntyvien markkinoiden markkinasalkun odotustuotto on 0.15.

3. Yhden periodin finanssimarkkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla  $i = 0.03$  (arvopaperi 1) ja 3 riskillistä arvopaperia (arvopaperit 2, 3 ja 4). Arvopaperin  $n$  hetken 0 hinta on  $S_n(0)$  ja odotustuotto  $r_n$ ,  $n = 1, \dots, 4$ . Riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä. Toimija on muodostanut CAP-mallin mukaisen optimaalisen salkun, jossa bondiin on sijoitettu  $6.4 \cdot 10^5$  euroa ja arvopapereita  $n$  on  $\theta_n$  kappaletta,  $n = 2, 3, 4$ . Salkun tuottoasteen hajonta 0.6. Muut numeroarvot ovat seuraavan taulukon mukaiset.

$n$	$S_n(0)$	$r_n$	$\theta_n$
2	100	0.1	1 920
3	200	0.1	2 400
4	400	0.2	720.

a) Määrää salkun odotustuotto.

b) Määrää tuottoasteen hajontaa 0.8 vastaava maksimaalinen odotustuotto ja sitä vastaava salkku.

4. Markkinoilla on  $N$  arvopaperia. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla  $i \geq 0$ . Odotustuottoa  $r > i$  vastaava minimaalinen salkun tuottoasteen hajonta on  $a(r - i)$ , missä  $a$  on positiivinen vakio.

Lisätään markkinoille arvopaperi  $N + 1$ , jonka odotustuotto on suurempi kuin  $i$  ja tuottoaste stokastisesti riippumaton markkinoiden muiden arvopapereiden tuottoasteista. Olkoon  $r > i$ . Osoita, että syntyneillä markkinoilla on mahdollista konstruoida salkku, jonka odotustuotto on  $r$  ja hajonta hajonta pienempi kuin  $a(r - i)$ .

5. Markkinoilla on arvopaperit  $1, \dots, N$ . Arvopaperin  $n$  hetken nolla hinta on  $S_n(0) > 0$  ja hetken yksi arvo  $S_n(1)$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Oletetaan, että  $S_N(1)$  on lineaarisesti riippuva muista arvopapereista. Toisin sanoen on olemassa sellaiset  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}$ , että

$$S_N(1) = \alpha_1 S_1(1) + \dots + \alpha_{N-1} S_{N-1}(1) \quad \text{m.v.}$$

Oletetaan, että  $S_N(0) = \alpha_1 S_1(0) + \dots + \alpha_{N-1} S_{N-1}(0)$ . Osoita, että tehokkaat varianssi-/odotustuottoparit eivät muutu, jos arvopaperi  $N$  poistetaan markkinoilta.