

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 7, 26.4.2017

1. Olkoot markkinoilla arvopaperit $1, \dots, N$ ja näiden hetken yksi arvot $S_1(1), \dots, S_N(1)$. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$. Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Oletetaan, että $S_1(1), \dots, S_N(1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Olkoot arvopapereiden lukumäärät L_1, \dots, L_N .

Markkinoilla on K toimijaa. Utiliteettifunktiot määräytyvät ehdoista

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K,$$

missä μ_1, \dots, μ_K ovat positiivisia vakioita. Merkitään $\mu = (\sum_{k=1}^K \mu_k^{-1})^{-1}$. Olkoon alkuallokointi (η^1, \dots, η^K) . Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi tasapainotila.

2. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että finanssimarkkinat ovat täydelliset. Osoita, että tasapainotiloja on tasan yksi.

3. Markkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$. Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Arvopaperin n hetken yksi arvo on $S_n(1)$ ja lukumäärä $L_n, \forall n$. Markkinoilla on $K \geq 2$ toimijaa, joiden salkut alkutilanteessa ovat $\eta^k, k = 1, \dots, K$. Toimijan 1 utiliteettifunktio määräytyy ehdosta $u_1(z) = az + b, z \in \mathbb{R}$, missä $a > 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Toimijan k utiliteettifunktio u_k on aidosti kasvava ja aidosti konkaavi, $k = 2, \dots, K$. Osoita, että markkinoilla on sellainen tasapainotila, jossa toimijan k salkku muodostuu pelkästään bondeista, $\forall k \geq 2$.

4. Markkinoilla on arvopaperit $1, \dots, N$ ja näihin liittyvät hetken yksi arvot

$$S_1(1), \dots, S_N(1).$$

Markkinoilla on $K \geq 1$ identtistä toimijaa ts. salkut alkutilanteessa ja utiliteettifunktiot ovat samat kaikilla toimijoilla. Osoita, että markkinoilla on tasapainotila, kun yhteinen utiliteettifunktio oletetaan aidosti kasvavaksi ja aidosti konkaaviksi.

5. Olkoon $(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$ Pareto-optimaalinen allokointi täydellisillä markkinoilla. Osoita, että on olemassa sellainen alkuallokointi (η^1, \dots, η^K) ja hinnoittelija $\bar{\phi}$, että

$$(\bar{\phi}, \bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^K)$$

on markkinoiden tasapainotila.