Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 5, 5.4.2017

1. Kahden periodin arvopaperimarkkinoilla arvopaperi 1 on pankkitili, jonka vuosikorko on $i = 0$ molempina periodeina. Arvopaperi 2 on osake, jonka arvo hetkellä k on $S_2(k)$, $k = 0, 1, 2$. Oletetaan, että

$$S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 1 + \xi_1 \quad \text{ja} \quad S_2(2) = (1 + \xi_1)(1 + \xi_2),$$

missä ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia ja

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1/2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\xi_1 = 1/2) = 1/2$$

ja

$$\mathbb{P}(\xi_2 = -1/2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\xi_2 = 1/2) = 3/4.$$

Olkoon

$$X = \max(S_2(2) - 2, 0).$$

Tarkastellaan omavaraisiin strategioihin perustuvaa keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left((V(1 + y_1\xi_1)(1 + y_2\xi_2) - X)^2\right)$$

minimointia, missä y_1 on hetkellä 0 ja y_2 hetkellä 1 osakkeeseen sijoitettavan rahamäärän suhteellinen osuus ja $V > 0$ on alkupanos. Osuuden y_1 on oltava deterministinen ja osuuden y_2 $\mathcal{F}_1$-mitallinen ($\mathcal{F}_1 = \sigma(S_2(1)) = \sigma(\xi_1)$).

Osoita, että

$$X = \frac{1}{4}\mathbb{1}(\xi_1 = 1/2, \xi_2 = 1/2), \quad \mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F}_1) = \frac{3}{16}\mathbb{1}(\xi_1 = 1/2)$$

ja että

$$\mathbb{E}(X^2 \,|\, \mathcal{F}_1) = \frac{3}{64}\mathbb{1}(\xi_1 = 1/2), \quad \mathbb{E}(\xi_2 X \,|\, \mathcal{F}_1) = \frac{3}{32}\mathbb{1}(\xi_1 = 1/2).$$

2. (jatkoa) Osoita, että keskineliöpoikkeama

$$\mathbb{E}\left((V(1 + y_1\xi_1)(1 + y_2\xi_2) - X)^2 \,|\, \mathcal{F}_1\right)$$

minimoituu, kun valitaan

$$y_2 = y_2^* = \frac{3\mathbb{1}(\xi_1 = 1/2)}{8V(1 + y_1\xi_1)} - 1.$$

3. (jatkoa) Olkoon $g(V, y_1)$ edellisen tehtävän minimaalinen keskineliöpoikkeama. Osoita, että $\mathbb{E}(g(V, y_1))$ minimoituu, kun valitaan $y_1 = y_1^* = 3$ ja $V = V^* = 1/22$.

4. Monen periodin finanssimarkkinoilla satunnaismuuttuja X on toistettavissa eräällä omavaraisella strategialla θ. Osoita, että sopivin integroituvuusoletuksin θ minimoi X:n suojaamiseen liittyvän lokaalin riskin.

5. Todista, että luentojen esimerkissä 5.8 annetut $\bar{V}(k), \bar{\theta}_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots, T$, minimoivat lokaalin riskin sopivin integroituvuusoletuksin. Oletetaan myöskin, että kaikki varianssit $\mathrm{Var}\,(S_2(k+1) - S_2(k) | \mathcal{F}_k)$ ovat aidosti positiivisia m.v.