

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 7
Ylimääräiset harjoitukset, 2017

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Palautettava kirjallisesti joko luennoitsijalle tai laskuharjoitusten pitäjille perjantaihin 10.3 klo 16 mennessä.

1. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$

2. Olkoon $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ sellainen jono mitallisia funktioita $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, että summafunktio $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ on integroituva. Osoita, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j = 0.$$

3. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että funktio $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva.

4. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-nx^2} dx.$$

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx.$$

6. Olkoon $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että funktiot

$$g_n(x) = \frac{\cos f(x)}{1 + n(f(x))^2}$$

ovat integroituvia yli välin $[0, 1]$ ja että on olemassa raja-arvo

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx.$$

Mitä arvoja a voi saada, kun f käy läpi kaikki mitalliset funktiot $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$?