Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 5
22-24.2.2017

1. Osoita, että mitallisten funktioiden $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ tulo $fg$ on mitallinen.

2. Etsi $\liminf_{k\to\infty} a_k$ ja $\limsup_{k\to\infty} a_k$, kun:
   (a)
$$a_k = \frac{1 + 2k \sin \frac{k\pi}{8}}{3 + 4k};$$
   (b)
$$a_k = (-1)^k \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k};$$
   (c)
$$a_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} 2^{-j}.$$

3. Oletetaan, että lukujonolla $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on olemassa osajono $(a_{k_j})_{j=1}^{\infty}$, jolla on raja-arvo $\lim_{j\to\infty} a_{k_j} = a$. Osoita, että silloin pätee
$$\liminf_{k\to\infty} a_k \le a \le \limsup_{k\to\infty} a_k.$$

4. Olkoon $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A\colon \ \exists \lim_{j\to\infty} f_j(x)\}$ on mitallinen.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita.
   (a) Osoita, että joukot
$$A_j = \{x \in A\colon f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$$
   ovat mitallisia.
   (b) Osoita, että joukko
$$\{x \in A\colon \text{ jono } (f_k(x))_{k=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava}\}$$
   on mitallinen.

6. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että myös sen positiivisosa $f^+\colon A \to \mathbb{R}$, $f^+(x) = \max(0, f(x))$, on mitallinen.