Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 4
15-17.2.2017

1. Jos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono joukon X osajoukkoja, niin merkitään

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \quad \text{ja} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

[$\liminf$ = *limes inferior,* $\limsup$ = *limes superior*]

Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $A_j \in \Gamma$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

(a) Osoita, että

$$\liminf_{j\to\infty} A_j \in \Gamma, \quad \limsup_{j\to\infty} A_j \in \Gamma$$

ja

$$\mu(\liminf_{j\to\infty} A_j) \le \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{j\ge k}\mu(A_j)\right).$$

(b) Osoita, että

$$\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) \ge \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{j\ge k}\mu(A_j)\right),$$

jos $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) < \infty$.

(c) Todista ns. Borel-Cantelli lemma: Jos $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j) < \infty$, niin $\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 0$ eli melkein mikään piste ei kuulu äärettömän moneen A_j:hin.

2. Oletetaan, että $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} m^*(A_i).$$

3. Osoita, että joukko $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1 \text{ ja } 0 \le yx^2 < 1\}$ on mitallinen.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Olkoon

$$A_r = \{x \in A \colon f(x) > r\},$$

kun $r \in \mathbb{R}$. Osoita: jos $m_n^*(A_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $m_n^*(A_r) > 0$.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa joukot $B_1, B_2, \ldots$ siten, että $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja rajoittumakuvaus $f|B_i$ on mitallinen jokaisella i. Osoita, että f on mitallinen.

[Jatkuu kääntöpuolella.]

6. Olkoot joukot $A_k \subset [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$, mitallisia. Oletetaan, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa
$$m(A_k) > \frac{2^k - 1}{2^k}.$$
Osoita, että leikkausjoukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ on epätyhjä.