Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 3
8-10.2.2017

1. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? (Perustelut!)
   (a) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin reunajoukko ∂A on mitallinen.
   (b) Jos $B \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa joukko, niin ∂B on mitallinen.
   (c) Jos $A \subset \mathbb{R}$ on avoin ja rajoitettu, niin $m_1(\partial A) = 0$.

2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoita, että
$$m^*(A \cup E) + m^*(A \cap E) = m^*(A) + m^*(E).$$

3. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0, 1], y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}\}$. Osoita, että A on mitallinen ja laske $m_2(A)$.

4. Näytä, että $\mathbb{R}^2$:n osajoukko $\{(x, y) \colon x \in \mathbb{Q} \text{ tai } y \notin \mathbb{Q}\}$ on mitallinen.

5. Olkoon
$$\mathcal{F}_\sigma = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \colon F_i \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu kaikilla } i\}$$
ja
$$\mathcal{G}_\delta = \{\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \colon G_i \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin kaikilla } i\}.$$
Osoita, että $\mathcal{F}_\sigma \subset \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{G}_\delta \subset \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$, missä $\operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$ on kaikkien $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkojen perhe.

6. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jatkuva ja $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Osoita, että $fA \in \mathcal{F}_\sigma$.