Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 2
1-3.2.2017

1. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? (Perustelut!)
   (a) Jos $m^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon.
   (b) Jos $m^*(A) < \infty$, niin A on rajoitettu.

2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (t_1x_1, t_2x_2)$, missä $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Osoita, että
$$m_2^*(fA) = |t_1t_2|m_2^*(A)$$
kaikilla $A \subset \mathbb{R}^2$.

3. Sanomme, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz*, jos on olemassa vakio $L > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on 0-mittainen ja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitz, niin myös kuvajoukko fA on mitallinen ja $m(fA) = 0$.

4. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos
$$m^*(S \cup U) = m^*(S) + m^*(U)$$
kaikilla $S \subset E$ ja $U \subset \mathbb{R}^n \setminus E$.

5. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos
$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E)$$
jokaisella avoimella n-välillä I. [Voit pitää tunnettuna, että $m^*(I) = \ell(I)$, kun I on n-väli.]

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. (a) Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoin joukko $B \subset \mathbb{R}^n$, jolle $A \subset B$ ja
$$m_n^*(B) \le m_n^*(A) + \varepsilon.$$
(b) Osoita, että on olemassa avoimet joukot $B_k \subset \mathbb{R}^n$ s.e.
$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{ja} \quad m_n^*\big(\cap_{k=1}^{\infty} B_k\big) = m_n^*(A).$$