Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 1
25-27.1.2017

1. (a) Määritä $\inf E$ ja $\sup E$, kun $E = \{\frac{1}{\log x} \in \mathbb{R} \colon x > 1\}$.
   (b) Oletetaan, että $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Osoita, että
   $$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A.$$
   (c) Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ja $-2A = \{-2x \colon x \in A\}$. Osoita, että
   $$\inf(-2A) = -2 \sup A.$$

2. Olkoot $V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n$ avoimia ja $F_1, \ldots, F_k \subset \mathbb{R}^n$ suljettuja osajoukkoja. Näytä, että $\cap_{j=1}^{k} V_j$ on avoin ja $\cup_{j=1}^{k} F_j$ on suljettu joukko. Etsi lisäksi esimerkit seuraavista ilmiöistä: (a) $V_j \subset \mathbb{R}$ on avoin jokaisella $j \in \mathbb{N}$, mutta leikkaus $\cap_{j=1}^{\infty} V_j$ ei ole avoin joukko; (b) $F_j \subset \mathbb{R}$ on suljettu jokaisella $j \in \mathbb{N}$, mutta yhdiste $\cup_{j=1}^{\infty} F_j$ ei ole suljettu joukko.

3. Olkoon I ylinumeroituva joukko ja $a_i > 0$ kaikilla $i \in I$. Osoita, että
   $$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{J \subset I \text{ äärellinen}} \sum_{j \in J} a_j = +\infty.$$

4. Olkoon
   $$\mathcal{B} = \{B^n(x, r) \subset \mathbb{R}^n \colon x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$
   Osoita, että $\mathcal{B}$ on numeroituva. [Toisin sanoen, $\mathcal{B}$ on kokoelma sellaisia $\mathbb{R}^n$:n avoimia kuulia $B^n(x, r)$, joiden keskipisteiden x koordinaatit ovat rationaalilukuja ja säteet r ovat positiivisia rationaalilukuja.]

5. Olkoon A välin $[0, 1]$ rationaalipisteiden joukko eli $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
   (a) Olkoot $I_i =]a_i, b_i[,\ i = 1, \ldots, k$, avoimia välejä siten, että
   $$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i.$$
   Osoita, että
   $$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \geq 1$$
   jokaisella (äärellisellä) $k \in \mathbb{N}$.

(b) Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoimet välit $I_i =]a_i, b_i[$, $i \in \mathbb{N}$, siten, että

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, ja $k > 0$. Määritellään $\mathbb{R}^n$:n osajoukot

$$A + y = \{x + y \colon x \in A\} \quad \text{ja} \quad kA = \{kx \colon x \in A\}.$$

Todista:

$$m_n^*(A + y) = m_n^*(A) \quad \text{ja} \quad m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A).$$

Kurssin kotisivulle saattaa tulla myöhemmin vihjeitä joihinkin tehtäviin.