UH Introduction to mathematical finance I, Exercise-6 (3.03.2016)

In all the exercises we consider random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F})$ equipped with a probability measure $\mathbb{P}$ and a filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$, where $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ for $s \le t$.

Recall that a stochastic process $(M_t : t \in \mathbb{N})$ is a $(P, \mathbb{F})$-martingale if $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ $\forall t \in \mathbb{N}$ and $E_P(M_t | \mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1}$ $\forall t \ge 1$.

1. Let $\tau(\omega) \in \mathbb{N}$ and $\sigma(\omega) \in \mathbb{N}$ be stopping times in the discrete time filtration $\mathbb{F}$. Show that their minimum $(\tau \wedge \sigma)$ is a stopping time. Is the sum $(\tau(\omega) + \sigma(\omega))$ a stopping time as well ?

2. Olkoon $(Z_t, t \in \mathbb{N})$ jono jolla $Z_t > 0$ $\forall t$. Osoita

$$Z_t^{-1} = Z_0^{-1} - \sum_{u=1}^{t} \big(Z_u Z_{u-1}\big)^{-1} \Delta Z_u$$

3. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $Q \ll P$ todennäköisyysmittoja, ja $Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Osoita että $P \ll Q$ (eli $P \sim Q$) jos ja vain jos $Z(\omega) > 0$ P-melkein varmasti, ja silloin

$$\frac{dP}{dQ}(\omega) = Z(\omega)^{-1}$$

Vihje: käyyä mitan vaihdon kaavaa. Kokeile tuota kaava silloin kun $\Omega = \mathbb{R}$, $P = \mathcal{N}(0,1)$ on standardi Gaussinen jakauma, ja jakauma $Q = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on myös Gaussinen, jossa μ on odotusarvo ja σ^2 on varianssi.

4. Olkoon $f(x)$ jatkuva funktio jolla on jatkuva derivaatta $f'(x)$, ja $(X_t : t \in \mathbb{N})$ jono.

Osoita diskreetti Iton kaava

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{s=1}^{t} f'(X_{s-1}) \Delta X_s + \sum_{s=1}^{t} \big(f(X_s) - f(X_{s-1} - f'(X_{s-1}) \Delta X_s \big) =$$

$$\sum_{s=1}^{t} f'(X_{s-1}) \Delta X_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{t} \Delta f'(X_s) \Delta X_s + R(f', X, t)$$

jossa

$$R(f', X, t) = \sum_{s=1}^{t} \int_{X_{s-1}}^{X_s} \left(f'(u) - \frac{f'(X_{s-1}) + f'(X_s)}{2} \right) du$$

Osoita: jos X_t on $\mathbb{F}$-martingaali, ja $f(x)$ on konveksi funktio, jolla on rajoitettu derivaatta, $|f'(x)| \leq K < \infty \ \forall x$, silloin $f(X_t)$ on alimartingaali (keskimäärin ei-vähenevä).

Osoita jos derivaatta $f'(x)$ on α-Hölderin jatkuva, eli on olemassa $\alpha \in (0,1]$ ja $C > 0$ jolla $|f'(x) - f'(y)| \leq C^{\alpha}|x-y|$,

$$|R(f', X, t)| \leq \text{const} \sum_{s=1}^{t} \Delta X_s^2 \max\{|\Delta X_s|^{\alpha} : 1 \leq s \leq t\}$$

5. Olkoon $X_t = \sum_{u=1}^{t} \Delta X_u$ satunnaiskulku prosessin polku jossa $\Delta X_u \in \{-1, +1\}$ ja $f(x) = |x - x_0|$, jossa $x_0 \in \mathbb{R}$. Silloin

$$f'(x) = \text{sign}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{kun } x > 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \\ -1 & \text{kun } x < 0. \end{array} \right\}$$

Merkitään

$$L_t^{x_0} = \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}(X_{t-1} = x_0)$$

Osoita diskreetti aikainen Tanakan kaava

$$|X_t - x_0| = L_t^{x_0} + \sum_{s=1}^{t} \text{sign}(X_t - x_0)\Delta X_s$$