HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan I, Harjoitus-5 (24.02.2016)

Kaikissa tehtävissä satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ varustettu todennäköisyysmitalla $\mathbb{P}$ ja filtraatiolla $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$, jossa $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ kun $s \le t$.

1. Olkoon $W_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja, jolla $E_P(W_1) = 0$ ja $E_P(W^2) = 1$. Muistetaan että $E_P(\exp(\theta W_1)) = \exp(\theta^2/2)$. ja olkoon $(S_t, B_t : t \in \{\ 0,1\})$ markkinamalli jossa $B_0 = S_0 = 1$, $B_t = B_0(1+r)$, $r > -1$ on deterministinen. ja
$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_1 + \mu - \frac{\sigma^2}{2}).$$
Esitä riskineutraali mitta $Q \sim P$ jonka suhteen W_1 on Gaussinen.

   Vihje : kokeile mitta Q^θ uskottavuus osamäärällä $\frac{dQ^\theta}{dP} = \zeta_1(\theta) = \exp(\theta W_1)$, osoita että Q^θ mitan suhteen W_1 on edelleen Gaussinen, ja laske millä θ: arvolla Q^θ on riski neutraali.

   Laske arbitraasivapaa hintojen joukko eurooppalaiselle osto ja myynti optiolle $(S_1 - K)^+$ ja $(K - S_1)^+$, ja laske myös edullisin ylisuojausstraegia kallein alisuojaustrategia.

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ varustettuna filtraatiolla $F = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$, $\Delta W_t(\omega)$ $t = 1, \dots, T$ standardi Gaussisia satunnaismuuttuja ja $W_t = W_1 + W_2 + \cdots + W_t$. Tiedetään että W_t on Gaussinen odotuarvolla 0 ja varianssilla t. Oletamme että W_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen ja ΔW_t on P-riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_{t-1}$. Olkoon $(S_t, B_t : t \in \{\ 0,1\})$ markkinamalli jossa $B_0 = S_0 = 1$, $B_t = B_{t-1}(1 + r_t)$, $r_t > -1$ on deterministinen.

   ja $S_t = S_0 \exp\left(\sum_{u=1}^t \sigma_u \Delta W_u + \sum_{u=1}^t (\mu_u - \frac{\sigma_u^2}{2})\right)$

   (a) Esitä riski-neutraali martingaali mitta Q jonka suhteen ΔW_t ovat edelleen Gaussisia ja ΔW_t on Q-riippumaton $\mathcal{F}_{t-1}$ σ-algebrasta.

   Vihje Etsi uskottavuusosamäärä prosessi joka on tulo muotoinen, eli $Z_0 = 1$ ja
   $$Z_t = Z_1 \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_t}{Z_{t-1}} = \zeta_1 \zeta_2 \times \cdots \times \zeta_t,$$
   jolla $Z_t(\omega) \ge 0$, $E_P(Z_t) = 1$ ja $E_Q(S_T | \mathcal{F}_{t-1}) = S_t \frac{B_t}{B_T}$. Muista Bayesin kaava
   $$E_Q(S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E_Q(S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{E_P(S_t Z_t | \mathcal{F}_{t-1})}{E_P(Z_t | \mathcal{F}_{t-1})}$$

(b) Mitä tapahtuu kun μ_t,σ_t r_t eivät ole deterministisia, ja ovat $\mathbb{F}$-ennustettavia , onko silloin Q edelleen riskineutraali ?

(c) Olettamalla että $\forall t, \mu_t = \mu, \sigma_t = \sigma$ $r_t = r$ ovat deterministisia vakioita, kun $t < T$, käytä riskineutraali mitta Q hinnoitteilumitaksi ja laske vastaavat arbitraasi vapaita hintoja $c_{\text{call}} \frac{B_t}{B_T} E_Q((S_T - K)^+|\mathcal{F}_t)$ ja $c_{\text{put}} E_Q((K - S_T)^+|\mathcal{F}_t)$ eurooppalaiselle osto- ja myyntioptiolle $(S_T - K)^+$ ja $(K - S_T)^+$. Nämä optiot eivät ole toistettavissa tässä markkinamallissa ja arbitraasi vapaa hinnat eivät ole yksikäsitteisiä.

3. Olkoon $Y_1, \dots, Y_T$ Bernoulli satunnaismuuttujat jolla $P(Y_t = 1|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 - P(Y_t = 0|\mathcal{F}_{t-1}) = p_t(\omega) \in (0, 1)$. Oletetaan että Y_t on $\mathcal{F}$-mitallinen ja $p_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen, $\forall t = 1, \dots, T$.

   Markkinamallissa (B_t, S_t, X_t) instrumenttien dynamiikka on seuraava: $B_0 = S_0 = X_0 = 1$. ja

   $$B_t = B_{t-1}(1 + r_t), S_t = S_{t-1}(1 + u_t)^{Y_t}(1 + d_t)^{1-Y_t}, X_t = X_{t-1}(1 + d_t)^{Y_t}(1 + u_t)^{1-Y_t},$$

   jossa $-1 < d_t(\omega) < r_t(\omega) < u_t(\omega)$ ovat $\mathbb{F}$-ennustettavia prosesseja.

   (a) Laske riski-neutraali martingaali mitta.
   Vihje etsi uskottavuusosamäärä joka on tulomuotoinen.

   (b) Olettamalla että $u_t = u, d_t = d, r_t = r, p_t = p$ jossa $-1 < d_t < r_t < u_t$ ja $p \in (0, 1)$ ovat deterministisia vakioita, Silloin kun $t \leq T$ laske arbitraasi vapaa hinta $c(\text{swap}) = \frac{B_t}{B_T} E_P((S_T - X_T)^+|\mathcal{F}_t)$ swap-optiolle $(S_T - X_T)^+$.

4. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ rippumattomia ja samoin jakautuneita joilla $P(X_t = 1) = 1 - P(X_t = -1) = p = 1/2$, ja $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t$. Kun $a < 0 < b$, jossa $a, b \in \mathbb{Z}$, olkoon

   $$\tau(\omega) = \inf\{t : S_t(\omega) \notin (a, b)\}.$$

   (a) Osoita että $\tau(\omega)$ on pyhsähdyshetki filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u : u \leq t) = \sigma(X_u : u \leq t)$.

   (b) Osoita että S_t on $\mathbb{F}$-martingaali joka on neliö integroituva $E(S_t^2) < \infty \ \forall t$.

   (c) Osoita että pyhsäydetty prosessi $(S_{t\wedge\tau} : t \in \mathbb{N})$ on martingaali.

   (d) Osoita että $P(\tau < \infty) = 1$. Vihje: muista toinen Borel Cantelli lemma.

(e) Laske $P(S_\tau = a)$ ja $P(S_\tau = b)$. Vihje: osoita että $S_{t\wedge\tau}$

(f) Osoita että martingaalin S_t:n $\mathbb{F}$-ennustettava variaatio, on $\langle S \rangle_t = t$ eli

$$M_t := S_t^2 - t$$

on $\mathbb{F}$-martingaali.

(g) Osoita että $E(\tau) < \infty$. Vihje: $(M_{t\wedge\tau} : t \in \mathbb{N})$ on martingaali, ja

$$0 \le n \wedge \tau = S_{n\wedge\tau}^2 - M_{t\wedge\tau}, \text{ jossa } S_n^2 \le a^2 + b^2 \quad \forall n \tag{0.1}$$

Käytä Fatou:n lemma kun $n \to \infty$.

(h) Laske odotusarvo $E(\tau)$. Vihje: laske $E(S_\tau^2)$, ota odotusarvot yhtälössä (0.1) ja käytä monotonisen konvergenssin ja Lebesgue dominoidun konvergenssin lauseita.