HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan I, Harjoitus-4 (17.02.2016)

Kaikissa tehtävissä satunnaismuuttujat elävät todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ varustettu todennäköisyysmitalla $\mathbb{P}$ ja filtraatiolla $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$, jossa $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ kun $s \le t$.

Muistetaan että prosessi $(M_t : t \in \mathbb{N})$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali kun $M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ $\forall t \in \mathbb{N}$ ja $E_P(M_t | \mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1}$ $\forall t \ge 1$.

1. Osoita: jos M_t on $\mathbb{F}$-martingaali, $E_P(M_t) = E_P(M_0)$ $\forall t \in \mathbb{N}$.

2. Osoita seuraava lemma

   Jos $(M_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on $(\mathbb{F}, P)$-martingaali joka on myös $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava, eli $\forall t > 0$ $M_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen, seuraa että se on satunnaisvakio: $M_t(\omega) = M_0(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{N}$, jossa $M_0(\omega)$ on $\mathcal{F}_0$-mitallinen.

3. Olkoon $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t : t \in \mathbb{N})$ toinen filtraatio, jolla $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ $\forall t \in \mathbb{N}$. Osoita että jos M_t on $(P, \mathbb{F})$-martingaali joka on $\mathbb{G}$-sopiva, se on myös $(P, \mathbb{G})$-martingaali.

4. Todista seuraava lemma: Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ali-σ-algebra, $Y(\omega)$ $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja ja satunnaismuuttuja $X(\omega)$ P-riippumaton $\mathcal{G}$ σ-algebrasta. Esimerkiksi voisi olla $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ jossa $X \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} Y$.

   Kaikille Borel mitallisille ja rajoitetuille funktioille $f(x, y)$ pätee

   $$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega)) P(d\widetilde{\omega})$$
   $$= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), y) P(d\widetilde{\omega}) \Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, Y(\omega)) P_X(dx)$$

   jossa $P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$, $B \subseteq \mathbb{R}^d$ on Borelin joukko, eli kiinnitetään satunnaismuuttujan Y:n arvo $Y(\omega) = y$ ja integroidaan X:n satunnaismuuttujan arvot marginaali-jakaumasta.

   Käytä Kolmogorovin määritelmää ehdolliselle odotusarvolle.

   Voit olettaa alustavasti $0 \le f(x, y) = g(x)h(x)$, jossa g, h ovat mitallisia. Voidaan rakentaa sitten jonoa

   $$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} g_n(x) h_n(x) \uparrow f(x, y) \quad \forall x, y$$

   ja käyttää monotonisen konvergenssin lauseetta.

5. Olkoon $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi jolla $X_t \in L^1(P)$ kaikille $t \geq 0$, $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, ja

$$A_t := \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta X_s | \mathcal{F}_{s-1}), \quad A_0 = 0$$

   (a) osoita: $A_n \in L^1$ ja se on $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava.

   (b) osoita että $M_n := (X_n - X_0 - A_n)$ on $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali, jolla $M_0 = 0$.

   (c) Yhtälö

$$X_n = X_0 + A_n + M_n$$

   on prosessin (X_t) *Doobin* hajotelma martingaali- ja ennustettavaan osiin. Osoita että Doobin hajotelma on yksikäsitteinen: jos $(M')_n$ on toinen $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali ja (A'_n) on toinen ennustettava prosessi jolla $M'_0 = A'_0 = 0$ and

$$X_n = X_0 + A'_n + M'_n$$

   seuraa $M = M'$ and $A = A'$.

   (d) Osoita että (X_n) kun on alimartingaali (vastaavasti. ylimartingaali) Doobin hajotelman ennustettava osa A_n on ei-vähenevä (vastaavasti ei-kasvava).

6. Olkoon X_0 ja $(U_t : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{P}$-riippumattomia satunnaismuuttuja jossa U_t on Tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Olkoon $f_t : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel mitallisia funktioita.

   Määritellään induktiivisesti $X_t(\omega) = f_t(X_{t-1}(\omega), U_t(\omega))$ $\forall t \geq 1$.

   Olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, ja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$.

   (a) Osoita että $X_t(\omega)$ on Markov prosessi, eli

$$P\big(X_t \in B \big| \mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = P\big(X_t \in B \big| \sigma(X_{t-1})\big)(\omega)$$

   kaikille Borelin joukoille B.

   (b) Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Laske Doobin hajotelma

$$g(X_t) = g(X_0) + A_t(g) + M_t(g)$$

jossa $A_t(g)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava ja $M_t(g)$ on $\mathbb{F}$-martingaali.

Vihje

$$g(X_t) = E_P\big(g(X_t)|\mathcal{F}_{t-1}\big) + \Big(g(X_t) - E_P\big(g(X_t)|\mathcal{F}_{t-1}\big)\Big)$$

jossa $g(X_t) = g\big(f(X_{t-1}, U_t)\big)$

7. Olkoon satunnaismuuttujat $Y_1(\omega), \dots, Y_T(\omega)$ riippumattomia ja samoin jakautuneita Binaari(p) jakaumalla, jolla $P(Y_t = 1) = 1 - P(Y_t = 0) = p$.

   Otamme todennäköisyysavaruudeksi kolikko avaruus $\Omega = \{0,1\}^T$ ja jossa $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$, $\omega_t \in \{0,1\}$ ja oletetaan että $Y_t(\omega) = \omega_t \in \{0,1\}$.

   Olkoon $X_t(\omega) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$.

   (a) Osoita että X_t on Binomi(p,t) jakautunut, eli että

   $$P(X_t = x) = \binom{t}{k} p^x (1-p)^{t-x}, \qquad \text{kun } x \in \{0,1,2,\dots,n\},\ P(X = x) = 0 \text{ muuten}$$

   (b) Laske Doobin martingaali hajotelma

   $$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

   prosessille $X_t(\omega)$, jossa (M_t) on (P,F)-martingaali ja (A_t) on ennustettava filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t = 1, \dots, T)$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_r)$.

   (c) Laske (M_t) martingaalin $\mathbb{F}$-ennustettava kovariaatio prosessi $\langle M \rangle_t$ jolla

   $$M_t^2 \ - \langle M \rangle_t$$

   on $(P, \mathbb{F})$-martingaali.

   Vihje Laske Doobin hajotelma prosessille M_t^2.