

**HY/ Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan I, kevät 2016**  
**Harjoitus -1 (28.1.2016)**

Notaatio:  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ .

1. Olkoon  $V$  vektoriavaruus, esimerkiksi  $V = \mathbb{R}^d$ . Määritelmän mukaan  $\mathcal{C} \subseteq V$  on konvekksi jos ja vain jos

$$x, y \in \mathcal{C}, 0 \leq \alpha \leq 1 \implies \alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{C}$$

Osoita että kun  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_i \in \mathcal{C}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n \text{ ja } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \\ \implies \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathcal{C}$$

2. *Farkas' lemma*

Olkoon  $A$  ( $d \times n$ ) matriisi, ja  $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ .

Jompikumpi vaihtoehto on aina tosi:

- (a) On olemassa  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}_+^n$  jolla  $Ax = b$   
(b) On olemassa  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$  jolla  $yA \in \mathbb{R}_+^d$  ja  $b \cdot y < 0$ .

Todista Farkas lemmän erottavan hypertason lauseen avulla.

**Vihje** Geometrinen tulkinta: olkoon  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$   $A$ -matriisin sarakevektorit. Osoita että

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

joka on vektoreiden  $a_1, \dots, a_n$  virittämä kaartio on konvekksi ja suljettu  $\mathbb{R}^d$ :ssa.

(a) ja (b), vastaavat vaihtoehtoja  $b \in \mathcal{C}$  tai  $b \notin \mathcal{C}$ .

3. Osoita Gordonin lause: Olkoon matriisi  $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ . Silloin joko  $Ax > 0$  jollekin  $x \in \mathbb{R}^n$ , ( $r = (r_1, \dots, r_d) > 0$  tarkoittaa  $r_i > 0 \forall i$ ),  
tai  $yA = 0$  jollekin  $y \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ .

Vedonlyöntifirma	a	b	c	d	e	f	g
Barcelona voittaa	1.85	1.80	1.95	1.80	1.85	1.85	1.75
Manchester City voittaa	4.30	4.55	4.35	4.30	4.55	4.60	4.70
Tasapeli	3.50	3.55	3.35	3.70	3.30	3.45	3.55

Taulukko 1: vedonlyöntikertoimet

4. Yhden vedonlyöntifirman kertoimet Barcelona-Manchester-City jalkapallopelille ovat: Barcelonan voitolle 1.85, Manchester city voitolle 4.3, tasapelille 3.5, Onko tämä hinnoitteilu systeemi arbitraasivapaa ? Voiko pelaajavastapuoli luoda arbitraasi ei-negatiivisilla painotuksilla (ilman lyhyitä positioita) ?
  
5. Taulukko (1) esittää 7 eri vedonlyöntifirmojen kerrointa Liverpool-Manchester-City pelille.

Tarkista onko olemassa arbitraasi-mahdollisuus pelaajavastapuolelle joka poimii parhaat kertoimet jokaiselta vedonlyöntifirmasta, ja pelaa ei-negatiivisilla painotuksilla.