MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2015
Harjoitus 4
Tehtävät 2.2. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan avoimia joukkoja.

1. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d), missä $X = \mathbb{Q}$ ja metriikka on määritelty ehdolla $d(x, y) = |x - y|$. Määritellään

$$U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 < 2\}$$

ja

$$V = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}.$$

(a) Osoita, että U on avoin.
(b) Osoita, että V on avoin.
(c) Osoita, että $U \cup V = \mathbb{Q}$ ja $U \cap V = \emptyset$.

2. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d), missä $X = \mathbb{R}$ ja metriikka on määritelty ehdolla $d(x, y) = |x - y|$. Oletetaan, että U ja V ovat avoimia joukkoja, joille pätee $U \cap V = \emptyset$. Osoita, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle pätee $c \notin U \cup V$.
Vihje: Oletetaan, että $a \in U$ ja $b \in V$. Oletetaan, että $a < b$. (Tapaus $b < a$ on aivan samanlainen.) Merkitään

$$A = [a, b] \cap U.$$

Osoita, että on olemassa $c = \sup A$ ja että $c \notin U \cup V$. (Huom.: Tätä päättelyä kannattaa verrata Bolzanon lauseen todistukseen kurssilla Analyysi I.)

3. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d), missä $X = \mathbb{R}^2$ ja metriikka on määritelty ehdolla $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. (Tässä $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$.) Merkitään

$$U = \{x \in X \mid x_2 > 2x_1 + 3\}.$$

Osoita, että U on avoin. (Tässä tehtävä on tarkoitus tehdä suoraan avoimen joukon määritelmän perusteella. Sen voisi tehdä myös lauseen 4.8. avulla.)

4. Kirjan tehtävä 3:10.

5. Kirjan tehtävä 3:3. Tässä ja seuraavassa tehtävässä kannattaa muistaa, että äärellisen monesta reaaliluvusta voidaan aina valita pienin.

6. Kirjan tehtävä 3:11.