MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2015
Harjoitus 7
Tehtävät 9.3. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan kertaillaan alkukevään käsitteitä osittain uusissa tilanteissa.

1. Tarkastellaan reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ varustettuna tavallisella metriikalla. Anna esimerkki kahdesta eri joukosta, joilla on sama sulkeuma.

2. Tarkastellaan reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ varustettuna tavallisella metriikalla. Tarkastellaan joukkoja

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k, 2k+1[$$

ja

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k+1, 2k+2[.$$

Selvitä $\overline{A \cap B}$ ja $\overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Tarkastellaan kirjan sivulla 18 käsiteltyä avaruutta $X = \text{raj}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, jonka alkiot ovat rajoitettuja lukujonoja $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$. Kuten kirjassa kerrotaan, X on vektoriavaruus ja yhtälö

$$||x|| = \sup\{|x_n| \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

määrittelee siinä normin. Tarkastellaan normiavaruuden X osajoukkoa

$$A = \{x \in X \mid x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n\}.$$

(a) Osoita, että A on aliavaruus.
(b) Onko A suljettu? Tässä voi auttaa esimerkiksi, kun miettii pistettä $x \in X$, jolle $x_n = \frac{1}{n}$ kaikilla n.

4. Tarkastellaan kaikkien binäärijonojen $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$ joukkoa X. Jono on binäärijono, jos kaikilla n pätee $x_n \in \{0, 1\}$. Määritellään alkioille $x \in X$ ja $y \in X$, että $d(x, y) = 0$ jos $x = y$, ja kun $x \neq y$, niin $d(x, y) = \frac{1}{2^n}$, jos $x_n \neq y_n$ mutta $x_k = y_k$ kaikilla $k < n$. Tarkastellaan siis jonojen ensimmäistä eroavuutta ja se määrittää jonojen välisen etäisyyden. Osoita, että funktio d on joukon X metriikka.

5. Tarkastellaan edellisen tehtävän metristä avaruutta. Oletetaan, että $x \in X$.
(a) Osoita, että kuula $B(x, 1/2)$ on suljettu.
(b) Osoita, että kuula $B(x, 1/4)$ on suljettu.

Lisäkysymys: onkohan tässä avaruudessa jokainen kuula suljettu joukko?

6. Tarkastellaan edelleen tehtävän 4 metristä avaruutta. Merkitään

$$A = \{x \in X \mid x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n\}.$$

Oletetaan, että $a_n = 1$ kaikilla n. Osoita, että piste a on joukon A kasautumispiste.