

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2015

Harjoitus 11

Tehtävät 13.4. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan täydellisyyttä ja tasaista jatkuvuutta.

1. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja d on $\{0, 1\}$ -metriikka. Osoita, että (X, d) on täydellinen.

2. Kirjan tehtävä 12:2.

3. Kirjan tehtävä 12:3.

4. Kirjan tehtävä 12:12.

5. Sovelletaan edellisen tehtävän tulosta tapukseen, missä $X = [-1, 1]$ ja missä metriikka on tavallinen. Merkitään $x_0 = 1$ ja tarkastellaan Banachin kiintopistelauseen 12.8. todistuksen jonoa x_1, x_2, \dots kahdessa tapauksessa.

(a) Oletetaan, että $f(x) = \cos x$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että f on kontraktio. Määritä n , jolle pätee $|x_n - a| < 10^{-100}$, missä a on yhtälön $x = \cos x$ juuri.

(b) Oletetaan, että $f(x) = \frac{1}{7} \cos x$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että f on kontraktio. Määritä n , jolle pätee $|x_n - a| < 10^{-100}$, missä a on yhtälön $7x = \cos x$ juuri.

6. Kirjan tehtävä 12:14.