HY Todennäköisyysteoria, kevät 2015, laskuharjoitukset 2 (4.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, additiivinen todennäköisyys P on σ-additiivinen jos ja vain jos kaikille jonoille $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$, ali $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, seuraa $P(A_n) \downarrow 0$.

   Tämä ei päde äärettömälle mitalle, esimerkiksi Lebesguen mitalle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa, joka on σ-äärellinen. Keksi vastaesimerkki.

   R Olkoon λ Lebesgue mitta mitallisessa avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$ jossa $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ja $A_n = [n, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$.

   Silloin $A_n \supseteq A_{n+1} \downarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$

   mutta $\lambda(A_n) = +\infty$ joka ei suppene kohti nollaan.

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ($\mathcal{F}$ on σ-algebra).

   Muistetaan ulkomitan määritelmä:

   Kuvaus $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ on *ulkomitta* (engl. *outer measure*) jos

   (a) $\lambda(\emptyset) = 0$,

   (b) $A_1 \subseteq A_2 \quad , A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \quad \Longrightarrow \quad \lambda(A_1) \le \lambda(A_2)$

   (c) λ on ali-σ-additiivinen: kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$,

   $$\lambda\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_n \lambda(A_n)$$

   Osoita: kun $\mathcal{Q}$ todennäköisyysmittojen kokoelma todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, seuraa että

   $$\lambda(A) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A), \qquad A \in \mathcal{F},$$

   on ulkomitta.

   R.

   (a)

   $$\lambda(\emptyset) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(\emptyset) = 0$$

   (b) kun $A_1 \subseteq A_2 \quad , A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2,\ \forall Q \in \mathcal{Q}\ Q(A_1) \ge Q(A_2)$ josta seuraa

   $$\lambda(A_1) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A_1) \ge \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A_2) = \lambda(A_2)$$

(c) kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$,

$$\lambda\Big(\bigcup_n A_n\Big) \le \sum_n \lambda(A_n)$$

R.

$$\lambda\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}}\Big\{Q\Big(\bigcup_n A_n\Big)\Big\} \le \sup_{Q\in\mathcal{Q}}\Big\{\sum_n Q(A_n)\Big\} \le\le \sum_n \lambda(A_n)$$

koska jokainen $Q \in \mathcal{Q}$ on σ-additiivinen ja siksi ali-σ-additiivinen, ja $Q(A_n) \le \lambda(A_n)$, $\forall Q \in \mathcal{Q}$.

3. Olkoon μ_1, μ_2 σ-additiivisiä mittoja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.

(a) Mikä on pienin ulkomitta $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$
jolla $\lambda(A) \ge \mu_i(A), \forall A \in \mathcal{F}, i \in 1, 2$?
R
$\rho(A) = \max\big\{\mu_1(A), \mu_2(A)\big\}$ $\forall A \in \mathcal{F}$

(b) Mikä on pienin σ-additiivinen mitta $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$
jolla $\mu(A) \ge \mu_i(A), \forall A \in \mathcal{F}, i \in 1, 2$?
R Vastauksessa tarvitaan mittojen Radon-Nikodym derivaattoja.
O $\lambda(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A)$ on σ-additiivinen mitta $(\Omega, \mathcal{F})$ avaruudessa, jolla $\lambda(A) \ge \lambda_i(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}, i = 1, 2$.
Radon-Nikodym derivaattojem avulla konstruoidaan vielä pienmpää dominoiva mitta
Olkoon $\zeta_i(\omega) = \frac{d\mu_i}{d\lambda}(\omega)$ $i = 1, 2$.
ja

$$\mu(A) := \int_\Omega \zeta_1(\omega) \vee \zeta_2(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) \lambda(d\omega)$$

Seuraa että $\forall i = 1, 2$

$$\mu_i(A) \le \mu(A) \le \rho(A) = \mu_1(A) \vee \mu_2(A) \le \mu_1(A) + \mu_2(A) = \lambda(A)$$

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, määritellään mielivaltaisen joukon $G \subseteq \Omega$ ulkomitta

$$P^*(G) = \inf_{\{F_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

jossa infimum otetaan yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Caratheodoryn laajennuslauseen todistuksessa osoitettiin että P^* on ulkomitta, siis on numeroituvasti sub-σ-addiitivinen, kasvava, ja $P^*(\emptyset) = 0$.

Määriteltiin myös σ-algebra $\mathcal{L}$ joka koostuu kaikista joukoista $A \subseteq \Omega$ jotka *jakaavat siististi* ulkomitan P^* seuraavalla tavalla

$$P^*(G) = P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

$\mathcal{L}$ jäsenet kutsutaan myös P^*-mitallisiksi. Olemme myös osoittaneet että $P^* : \mathcal{L} \mapsto [0,1]$ on σ-additiivinen todennäköisyysmitta.

Määritellään nyt joukkoperheet

$$\mathcal{F}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B', B'' \in \mathcal{F} \text{ with } B' \supseteq A \supseteq B'' \text{ and } P(B' \setminus B'') = 0\big\},$$
$$\mathcal{N}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F} \text{ with } B \supseteq A \text{ and } P(B) = 0\big\} \qquad (\ P\text{-nolla joukot}\ )$$

(a) Osoita että jokaiselle joukolle $G \subseteq \Omega$, on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ jolla $F \supseteq G$ ja $P(F) = P^*(G)$.

Ratkaisu.

Olkoon mitallinen peite $\{F_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ jolla

$$\bigcup_k F_k^n \supseteq G.$$

Ulkomitan P^* määritelmästä seuraa, että $\forall n$ on olemassa peite $\{F_k^n\}$, jolle

$$P^*(G) \leq P^*(\bigcup_k F_k^n) = P(\bigcup_k F_k^n) \leq P^*(G) + \frac{1}{n}$$

Olkoon

$$A^n = \bigcap_{l \leq n} \left(\bigcup_k F_k^l \right) \in \mathcal{F}.$$

Selvästi $A^n \supseteq A^{n+1} \supseteq G$, ja

$$\bigcup_k F_k^n \supseteq A^n.$$

Asetetaan $A := \lim \downarrow A^n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^n \in \mathcal{F}$.
Seuraa P^* määritelmästä, että

$$P^*(G) \le P^*(A^n) = P(A^n) \le P(\bigcup_k F_k^n) \le P^*(G) + \frac{1}{n}$$

Koska P on σ-additiivinen (monotonisesti jatkuva),

$$P(A) = \lim_n \downarrow P(A^n) = P^*(G) \square$$

(b) Osoita että jokaiselle joukolle $G \in \mathcal{L}$, on olemassa joukko $E \in \mathcal{F}$ jolla $E \subseteq G$ and $P(E) = P^*(G)$.
Vihje: soveltakaa tehtävän a) tulosta joukolle G^c ja käytä oletusta $G \in \mathcal{L}$.
Ratkaisu.

Koska $G \in \mathcal{L}$,

$$1 = P^*(\Omega) = P^*(G) + P^*(G^c)$$

Edellisestä tehtävästä seuraa että $\exists A \in \mathcal{F}$ jolla $A \subseteq G$, $A^c \subseteq G^c$,

$$1 - P^*(G) = P^*(G^c) = P(A^c) = 1 - P(A) \quad \square$$

(c) Osoita että $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$. Tämä on σ-algebran $\mathcal{F}$ P-täydennys P-nolla mittaisilla joukoilla.
Ratkaisu.

Pitää osoittaa, että

- $\mathcal{F}^P$ on σ-algebra.
- $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \subseteq \mathcal{F}^P$.
  Koska $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää virittäjäjoukkonsa, niin inkluusion osoittamiseksi riittää osoittaa, että virittäjä joukot $\mathcal{F}, \mathcal{N}^P \subset \mathcal{F}^P$.
  - Jos $A \in \mathcal{F}$, niin valinnoilla $B' = B'' = A$ on $P(B' \backslash B'') = 0$ ja $A \in \mathcal{F}^P$.
  - Jos $A \in \mathcal{N}^P$, niin $\exists\ B \in \mathcal{F}$, jolle $B \supseteq A$ ja $P(B) = 0$. Valitsemalla $B' = B$ ja $B'' = \emptyset$ on $P(B' \backslash B'') = 0$.
- $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{F}^P$.
  Jos $A \in \mathcal{F}^P$, niin $\exists B', B'' \in \mathcal{F}$, joille $B' \supseteq A \supseteq B''$. Tällöin $A = (A \backslash B'') \cup B''$. $A \backslash B'' \subseteq B' \backslash B''$, joten $A \backslash B'' \in \mathcal{N}^P$. Josta seuraa, että $A \in \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$

$\mathcal{F}^P$ on σ-algebra:

- Selvästi $\Omega \in \mathcal{F}^P$.
- Jos $B' \supseteq A \supseteq B''$, jossa $(B' \setminus B'') \in \mathcal{N}^p$, $(B'')^c \supseteq A^c \supseteq (B')^c$, jossa $(B'')^c \setminus (B')^c = (B'')^c \cap B' = (B' \setminus B'') \in \mathcal{N}^P$.
- Jos $A_k = B_k \cup N_k$ jossa $B_k \in \mathcal{F}$ ja $N_k \subseteq C_k \in \mathcal{F}$ jolla $P(C_k) = 0$, seuraa että $A = \bigcup_k (B_k \cup N_k) = \left(\bigcup_k B_k\right) \cup \left(\bigcup_k N_k\right) = B \cup N$ jossa $B \in \mathcal{F}$

$$N = \left(\bigcup_k N_k\right) \subseteq \left(\bigcup_k C_k\right) \text{ ja } P\left(\bigcup_k C_k\right) \leq \sum_k P(C_k) = 0 \qquad \square$$

(d) Osoita että $\mathcal{F}^P = \mathcal{L}$. Vihjeet: Osoittakseen että $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$, muista että ulkomitta P^* on kasvava ja subadditiivinen.
Osoittakseen että $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{L}$, käytä tehtäviä a),b).
Ratkaisu.

- $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \subseteq \mathcal{L}$.
  Osoitetaan, että virittäjäjoukot kuuluvat luokkaan $\mathcal{L}$.
  - $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$.
    Testijoukolle $G \subseteq \Omega$ on a)-kohdan nojalla olemassa $F \in \mathcal{F}$ siten, että $F \supseteq G$ ja $P^*(G) = P(F)$. Jos $A \in \mathcal{F}$, niin
    $$\begin{aligned} P^*(G) &\leq P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \\ &\leq P^*(F \cap A) + P^*(F \cap A^c) \\ &= P(F \cap A) + P(F \cap A^c) \\ &= P(F) = P^*(G). \end{aligned}$$
  - $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$.
    Olkoon $N \in \mathcal{N}^P$, $G \subseteq \Omega$.
    $$\begin{aligned} P^*(G) &\leq P^*(G \cap N) + P^*(G \cap N^c) \\ &\leq P^*(N) + P^*(G \cap N^c) = 0 + P^*(G \cap N^c) \leq P^*(G) \end{aligned}$$
    ja $N \in \mathcal{L}$.
- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}^P$.
  Olkoon $L \in \mathcal{L}$.
  a)-kohta $\Rightarrow \exists\ B' \in \mathcal{F}$ s.e. $B' \supseteq L$ ja $P^*(L) = P(B')$.
  b)-kohta $\Rightarrow \exists\ B'' \in \mathcal{F}$ s.e. $B'' \subseteq L$ $P^*(L) = P(B'')$.
  Nyt $P(B' \setminus B'') = P(B') - P(B'') = 0$.

5. Olkoon P todennäköisyysmitta avaruudessa $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ja $F(t) := P((-\infty, t])$, joka kutsutaan todennäköisyysmitan kertymäfunktioksi. Osoita:

(a) F on kasvava
R. Koska $(-\infty, s] \subseteq (-\infty, t]$ kun $s \le t$, seuraa $F(s) \le F(t)$.

(b) F on oikealta jatkuva. Vihje: Käytä todennäköisyyden σ-additiivisuutta.
R. Kun $n \uparrow \infty$,

$$(-\infty, t + n^{-1}] \downarrow (-\infty, t] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, t + n^{-1}]$$

Koska P on σ-additiivinen seuraa että $F(t + n^{-1}) \downarrow F(t)$.

(c)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \ .$$

R . Kun $n \uparrow \infty$,

$$(-\infty, -n] \downarrow \emptyset \text{ ja } (-\infty, n] \uparrow \mathbb{R}$$

Koska P on σ-additiivinen

$$F(-n) \downarrow P(\emptyset) = 0 \text{ ja } F(n) \uparrow P(\mathbb{R}) = 1$$

(d) Keksi esimerkki jossa F ei ole jatkuva.
Vihje: määritellään pistemassa $\delta_x(A) := \mathbf{1}(x \in A)$ jossa $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Osoita että $\delta_x(\cdot)$ on todennäköisyys. Mikä on sen kertymäfunktio?
Ratkaisu.

TN-mitan määritelmä $(A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

- $\delta_x(A) \ge 0$.
- $\delta_x(\Omega) = 1$.
- Jos $A \cap B = \emptyset$, niin

$$\delta_x(A \cup B) = \mathbf{1}(x \in A) + \mathbf{1}(x \in B)$$

- σ-additiivisuus yhtäpitävää sen kanssa, että

$$A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n) \downarrow 0.$$

$\delta_x((-\infty, -n]) = 0$, kun $-n < x$.

Kun todennäköisyysmitalla P on atoomi (tai pistemassa) $\{x\}$, eli $P(\{x\}) > 0$ jollekin $x \in \mathbb{R}$, koska P on additiivinen seuraa

$P((-\infty, x]) = P((-\infty, x)) + P(\{x\})$ eli $F(x) - F(x-) = \Delta F(x) = P(\{x\}) > 0$

6. Määritelmän mukaan avaruuden $\Omega = \mathbb{R}^d$ Borelin σ algebra on avomien joukkojen virittämä σ-algebra.

   Kun $t \in \mathbb{R}^d$, olkoon

$$(-\infty, t] = \{s \in \mathbb{R}^d : \ s_i \le t_i, i = 1, \dots d\}$$

   Osoita että luokka

$$\mathcal{I} = \left\{(-\infty, q], q \in \mathbb{Q}^d\right\}$$

   on π-luokka joka virittää Borelin σ-algebran.

   Vihje Jos U on avoin $\mathbb{R}^d$:ssa, ja Q on tiheä $\mathbb{R}$:ssa, $\forall x \in U \ \exists r, q \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r < q$ (eli $r_i < q_i$ kun $i = 1, \dots, d$

$$x \in (r, q) := (r_1, q_1) \times (r_2, q_2) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U.$$

   R. Selvästi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supseteq \sigma(\mathcal{I})$, koska $(-\infty, q] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

   Kun $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{\mathbf{d}}$, $(-\infty, q] \cap (-\infty, r] = (-\infty, r \wedge q]$ jossa $r \wedge q \in \mathbb{Q}^d$,

   $(r \wedge q)_i = \min(r_i, q_i)$, $i = 1, \dots d$, eli $\mathcal{I}$ on π-luokka.

   Huomaamme että

$$(-\infty, q) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, q - n^{-1}\mathbf{1}] \in \sigma(\mathcal{I})$$

   jossa $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^d$.

   Olkoon

$$L(r, q) := \{s \in \mathbb{R}^d : r < s \le q\} \in \sigma(\mathcal{I})$$

   laatikko kulmapisteilla $r \le q \in \mathbb{Q}^d$, (eli $r_i \le q_i$ kun $i = 1, \dots, d$).

   Esimerkiksi kun $d = 2$, laatikon indikaattori funktiolla on esitys

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\{t \in L((r_1, r_1), (q_1, q_2)]\} &= \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (q_1, q_2)]\} + \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (r_1, r_2)]\} \\ &\quad -\mathbf{1}\{t \in (-\infty, (r_1, q_2)]\} - \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (q_1, r_2)]\} \end{aligned}$$

   joka yleistyy korkeammalle dimensioille.

Laatikon sisältö

$$L^o(r,q) = (L(r,q) \setminus \partial L(r,q)) \in \sigma(\mathcal{I})$$

on avoin laatikko samoilla kulmapisteillä.

Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^d$ avoin joukko. Koska U on avoin, kaikille $x \in U$ on olemassa avoin laatikko $L^o(r(x), q(x))$ jolla $x \in L^o(r(x), q(x)) \subseteq U$ kulmapisteillä $r(x) \leq q(x) \in \mathbb{Q}^d$. Tästä seuraa että

$$U = \bigcup_{x \in U} L^o(r(x), q(x)) \in \sigma(\mathcal{I})$$

koska yhdiste on numeroituva (vaikka avoin joukko U on ei-numeroituva): rationaalisten kulmapisteiden määrä on korkeintaan numeroituva.

Koska määritelän mukaan avoimet joukot virittävät Borelin σ-algebran , myös $\sigma(\mathcal{I}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$\mathbb{R}^2$: Avoimet laatikot $\in \sigma(\mathcal{I})$. Jokaiselle pistelle $x \in \mathbb{R}^2$ on olemassa $j, k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ s.e. $x \in A(j,k,n) := (\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}) \times (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$.

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j,k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} A(j,k,n),$$

numeroituva yhdiste. Jokaiselle $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ avoin on olemassa $A(j,k,n)$ s.e. $x \in A(j,k,n) \subset U$. Kaikkien tällaisten joukkojen (numeroituva) yhdiste on U.

7. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}$-arvoisten satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$.

   Osoita että

   $$\limsup_n X_n(\omega) := \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} X_k(\omega), \quad \liminf_n X_n(\omega) := \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} X_k(\omega),$$

   - ovat olemassa $\forall \omega \in \Omega$,
   - ovat ($\mathcal{F}$-mitallisia) satunnaismuuttujia.

   R.

   Huomataan että $\forall \omega \in \Omega$ jono

   $$Y_n(\omega) := \sup_{k \geq n} X_k(\omega) \geq Y_{n+1}(\omega)$$

on ei vähenevä, ja siksi sillä on monotoninen raja olemassa, yhtä kuin $\limsup_n X_n(\omega)$.

Jos $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ on satunnaismuuttjen jono,

$$\left\{\omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\{X_n(\omega)\} \in (-\infty, t]\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : X_n(\omega) \in (-\infty, t]\right\} \in \mathcal{F}$$

koska X_n ovat satunnaismuutujia.

Joukkojen kokoelma

$$\mathcal{C} := \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \left\{\omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\{X_n(\omega)\} \in B\right\} \in \mathcal{F}\right\}$$

on sekä π-luokka että Dynkinin luokka, eli se on σ-algebra, ja koska ses sisältää kaikki välit $(-\infty, t]$, se sisältää niiden virittämää σ-algebra joka on Borelin σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tämä tarkoittaa $\forall B$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\left\{\omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\{X_n(\omega)\} \in B\right\} \in \mathcal{F}$$

eli kuvaus

$$\omega \longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\{X_n(\omega)\}$$

on $\mathcal{F}$-mitallinen, ja määrä satunnaismuutuja.