HY Todennäköisyysteoria, kevät 2015, ratkaisut 1 (21.1.2015)

1. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ äärellinen joukko,

   $W = (w_1, \dots, w_n) \subseteq \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, jossa $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, ja vähintään yhdelle koordinaatille i, $w_i > 0$ (aidosti).

   Määritellään $\forall B \subseteq \Omega$

   $$P_W(B) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

   - Osoita että P_W on additiivinen ja $P_W(\Omega) = 1$. **R**$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$. Kun $A \cap B = \emptyset$,

     $$P_W(A \cup B) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_{A\cup B}(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_A(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} + \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} =$$
     $P_W(A) + P_W(B)$
     $$P_W(\Omega) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_\Omega(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} = 1$$

   - Karakterisoi P_W-varmat tapahtumat.

     R. Olkoon $N = \{i : w_i = 0\}$. Tapahtuma A on varma $\iff$ $P_W(A) = 1$, $\iff A^c = \Omega \setminus A \subseteq N$.

   - Olkoon $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

     X tulkitaan sopimukseksi joka maksaa takaisin suuretta $X(\omega_k) = x_k$ kun ω_k tapahtuu.

     Laske sopimuksen X:n hinta (odotusarvo) $E_{P_w}(X)$ hinnoitelutodennäköisyydellä P_w.

     R

     $$E_{P_w}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

2. (jatko) Olkoon $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Osoita hinnoittelutodennäköisyyden vaihto kaava

   $$E_{P_{WZ}}(X) = \frac{E_{P_W}(ZX)}{E_{P_W}(Z)}$$

   Tässä $(WZ) \in \mathbb{R}^n$ on pistettäin-tulo, eli $(WZ)_i = W_i Z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

R.

$$E_{P_{zw}}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i w_i} \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right)^{-1} = E_{P_w}(ZX) E_{P_w}(Z)^{-1}$$

3. (jatko) Olkoon nyt $C \subseteq \Omega$, jolla $P_W(C) > 0$. Maritellään $\forall B \subseteq \Omega$

$$P_W(B|C) := P_{W\mathbf{1}_C}(B)$$

jossa $\mathbf{1}_C$ on C joukon indikaattori. Osoita että

$$P_W(B|C) = \frac{P_W(B \cap C)}{P_W(C)}$$

ja kuvaus

$$B \mapsto P_W(B|C)$$

on additiivinen todennäköisyys. $P_W(B|C)$ on tapahtuman B:n ehdollinen todennäköisyyys ehdolla C tapahtumaa, P_W todennäköisyyden suhteen. Se on hyvin määritelty pelkästään kun $P_W(C) > 0$.

R

$$P_W(B|C) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{1}_B(\omega_i) \mathbf{1}_C(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{1}_C(\omega_i)} \frac{P_W(B \cap C)}{P_W(C)}$$

4. (jatko) Oloon $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio, laske sen hinta (odotusarvo) $E_{P_W}(X|C)$ ehdollisen todennäköisyyden $P_W(\cdot|C)$:n suhteen.

R

$$E_{P_w}(X|C) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \mathbf{1}_C(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{1}_C(\omega_i)} = \frac{E_{P_w}(X \mathbf{1}_C)}{P_W(C)}$$

5. Olkoon $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r \text{ rationaalinen} : 0 \le r \le 1 \}$.

Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukoista joilla on esitys äärellisenä yhdistenä joukoista $(a,b] \cap \mathbb{Q}$, $[a,b] \cap \mathbb{Q}$,$(a,b) \cap \mathbb{Q}$, tai $[a,b) \cap \mathbb{Q}$, jossa $0 \le a \le b \le 1$.

Määritellään $\forall 0 \le a \le b \le 1$

$$P((a,b] \cap \mathbb{Q}) = P([a,b] \cap \mathbb{Q}) = P((a,b) \cap \mathbb{Q}) = P([a,b) \cap \mathbb{Q}) = b - a,$$

- Osoita että $\mathcal{A}$ on algebra, eli $\Omega \in \mathcal{A}$, jos $A \in \mathcal{A}$ myos $A^c := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ ja jos $A, B \in \mathcal{A}$ myös $A \cup B \in \mathcal{A}$.
- Laajenna P joukkofunktio äärellisesti addiitiiviseksi mitaksi koko algebralle $\mathcal{A}$.
- Osoita että kyseinen additiivinen mitta P ei ole σ-additiivinen.

Vihje Tässä tapauksessa $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ on numeroituva !.

R. Jos $A, B \subseteq [0,1]$ ovat äärellisiä välien yhdisteitä, myös niiden komplentteja $[0,1]$:ssa, yhdiste ja leikkaukset ovat äärellisiä välien yhdisteitä.

Kun otetaan leikkaus $\mathbb{Q}$:n kanssa, seuraa että $\mathcal{A}$ on algebra.

Olkoon $A \in \mathcal{A}$ esityksellä

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle \cap \mathbb{Q}$$

jossa $0 \leq a_1 \leq b_1 < \cdots < a_n \leq b_n \leq 1$,

notaatio "$\langle$" voi tarkoittaa "(" vai "[",

notaatio "$\rangle$" voi tarkoittaa "]", vai ")",

eli välit saavat olle suljettuja tai avoimia oikealta ja vasemmalta.

Silloin joukon esitys on yksikäsitteinen ja

$$P_0(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Suoraan määritelmästä seuraa että P_0 on äärellisesti additiivinen, mutta ei voi olla σ-additiiivinen, koska

$$\Omega = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{ q\},$$

jossa $P_0(\{q\}) = q - q = 0$, ja $P_0(\Omega) = P_0([0,1]) = 1 - 0 = 1$, josta seuraa ristiriitä, koska

$$1 = P_0(\Omega) \neq \sum_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} P_0(\{q\}) \quad \square$$

6. Olkoon Ω mielivaltainen joukko, 2^Ω merkitsee sen potenssijoukko, eli Ω:n alijoukkojen kokoelma. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \in A \text{ vai } \omega \in B \text{ mutta ei molemmissa } \}$$

Näytä että potenssijoukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

- Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
- Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
- osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,
- osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

Vihje : indikaattorille pätee

$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$
$\mathbf{1}_{(A\Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = 1_A \mathbf{1}_{B^c} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{A^c}$

Ratkaisu.

$A, B, C \in 2^\Omega$.
$(2^\Omega, \Delta)$ on vaihdannainen ryhmä, jos

- $A\Delta B \in 2^\Omega$.
- Δ liitännäinen:
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$
- $\exists$ 1-alkio 1_Δ, jolle
$$1_\Delta \Delta A = A\Delta 1_\Delta = A$$
- $\exists\ -A \in 2^\Omega$:
$$A\Delta(-A) = (-A)\Delta A = 1_\Delta$$
- Δ vaihdannainen.

$(2^\Omega, \Delta, \cap)$ on rengas, kun

- $(2^\Omega, \Delta)$ on vaihdannainen ryhmä:
- $A \cap B \in 2^\Omega$
- $\cap$ liitännäinen
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- $\exists$ 1-alkio $1_\cap$
$$1_\cap \cap A = A \cap 1_\cap = A$$

- Osittelulait:

$$A \cap (B\Delta C) = A \cap B\Delta A \cap C \quad (A\Delta B) \cap C = A \cap C\Delta B \cap C$$

Määritelmien kohdat järjestyksessä:

- Operaatiot $\Delta, \cap$ suljettuja.
- Δ on liitännäinen koska summa modulo 2 on

  $$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv_2 (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C) \equiv_2 \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$$

  jossa $\equiv_2$ merkki on yhtäsuuruus modulo 2.
- $1_\Delta := \emptyset$:

  $$\mathbf{1}_{A\Delta\emptyset} \equiv_2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_\emptyset = \mathbf{1}_A$$

- $A\Delta A = \emptyset$, siis jokainen joukko on oman inverssi Δ:n suhteen.
- Δ on vaihdannainen

  $$\mathbf{1}_{A\Delta B} \equiv_2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \equiv_2 \mathbf{1}_{B\Delta A}$$

- $\cap$ on liitännäinen ja vaihdannainen

  $$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{(A\cap B)\cap C} = (\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{A\cap(B\cap C)} \\ &A \cap B = B \cap A \end{aligned}$$

- $\cap$ operaation identiteetti on Ω, $\Omega \cap A = A$
- $\cap$ ja Δ ovat distributiivisia

  $$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B\Delta C} \equiv_2 \mathbf{1}_A \big(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C\big) = \\ &\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} \equiv_2 \mathbf{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} \end{aligned}$$

7. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus varustettuna σ-algebralla $\mathcal{F}$ ja todennäköisyydellä P.

   Osoita: joukko funktio $\rho_i : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$

   $$\rho_1(A, B) = P(A\triangle B), \quad \text{ja} \quad \rho_2(A, B) := \frac{P(A\triangle B)}{P(A \cup B)} = P(A\triangle B|A \cup B)$$

   (silloin kun $P(A \cup B) = 0$ sovitaan että $0/0 = 0$), ovat etäisyyksiä, eli ovat positiivisia, symmetrisiä ja toteuttavat kolmion epäyhtälöä

   $$\rho_i(A, C) \le \rho_i(A, B) + \rho_i(B, C), \quad i = 1, 2$$

Vihje Yleisesti, jos $\rho_1 : E \times E \to \mathbb{R}^+$ on etäisyys, ja $z \in E$, seuraa myös

$$\rho_2(x,y) := \frac{2\rho_1(x,y)}{\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z)+\rho_1(x,y)} \qquad \text{(Steinhaus muunnos)}$$

on myös etäisyys. Meidän tapauksessa voidaan valita $z = \emptyset$ (tyhjä joukko).

Huomataan että Steinhaus muutoksen jälkeen $\rho_2(x,z) = \delta_z(x)$, eli piste r on eristetty ja metrinen avaruus (E, ρ_2) ei ole yhtenäinen.

.R Huomataan että

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{A\Delta C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_C - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_C = \big(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_C\big)^2 \\
&= \big(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C\big)^2 = \big(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C\big)^2 + 2\big(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C\big)
\end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned}
&\big(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C\big) = \mathbf{1}_B(1_A + 1_C - 1) - 1_A 1_C \\
&\le \mathbf{1}_B(1_A + 1_C - 1_A 1_C - 1) = \mathbf{1}_B(1_{A\cup C} - 1) \le 0
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{A\Delta C} \le \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_(B\Delta C) \\
&\Longleftarrow P(A\Delta C) \le P(A\Delta B) + P(B\Delta C)
\end{aligned}$$

Etäisyys $\rho_2(A,B)$ on Steinhaus muunnos etäisyydestä $\rho_1(A,B)$ jossa valitaan $z = \emptyset$ (tyhjä joukko):

$$\begin{aligned}
&\frac{2P(A\Delta B)}{P(A\Delta\emptyset) + P(B\Delta\emptyset) + P(A\Delta B)} = \frac{2P(A\Delta B)}{P(A) + P(B) + P(A\Delta B)} \\
&= \frac{2P(A\Delta B)}{P(A) + P(B) + P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)} \\
&= \frac{2P(A\Delta B)}{2P(A\cup B)} = \frac{P(A\triangle B)}{P(A\cup B)} = \rho_2(A,B)
\end{aligned}$$

8. Olkoon $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ saman joukon Ω:n σ-algebrien kokoelma jossa $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi-joukko.

   Osoita että leikkaus

$$\mathcal{G} := \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathcal{G}_\alpha$$

   on σ-algebra.

   Ratkaisu.

- $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ koska $\mathcal{G}_\alpha$ on σ-algebra. Siis $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}$.
- Jos $A \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ myös komplementti $A^c \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$, siis $A^c \in \mathcal{G}$ kun $A^c \in \mathcal{G}$.
- Jos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ myös $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$, siis $A \in \mathcal{G}$ kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}$.

9. Todista väitteet:

   Mielivaltainen π(vastaavasti d)-luokkien, leikkaus on π(vastaavasti d)-luokka. Eli

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{D}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka, ja

$$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka. Myös

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä σ-algebra.

   Ratkaisu.

   i) $d(\mathcal{C})$ on d-luokka. Määritelmän vaatimukset:
      - $\Omega \in \mathcal{D}$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \implies \Omega \in d(\mathcal{C})$
      - $A, B \in d(\mathcal{C})$ siten, että $A \subseteq B$. Tästä $A, B \in \mathcal{D}$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \implies B \backslash A \in D$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \iff B \backslash A \in d(\mathcal{C})$
      - Olkoon $A_n \in d(\mathcal{C})$, $n \in \mathbb{N}$ monotonisesti kasvava jono ja $A_n \uparrow A$ eli $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Jono A_n kuluu jokaiseen $\mathcal{D}$ ja määritelmän nojalla $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on jokaisen $\mathcal{D}$ alkio, josta seuraa, että $A \in d(\mathcal{C})$

   ii) $d(\mathcal{C})$ on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka: Jos $\mathcal{D}_0 \supseteq \mathcal{C}$ on d-luokka, niin

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_0 \; .$$

iii) $\pi(\mathcal{C})$ on π-luokka: $A, B \in \pi(\mathcal{C}) \Rightarrow A, B \in \mathcal{J}$ jokaisella π-luokalla $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$ jokaisella π-luokalla $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \pi(\mathcal{C})$.

iv) $\pi(\mathcal{C})$ on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka: samoin, kuin toinen kohta.

v) Tehtävässä 8 jo osoitettu, että $\sigma(\mathcal{C})$ on σ-algebra. Se, että se on pienin, menee samoin kuin toisessa kohdassa d-luokalle.

10. Olkoon $E \subseteq \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$ kokoelma osajoukoista

$$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$ and $a_i, b_i \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$, jossa

$$-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq +\infty,$$

Osoita että $\mathcal{E}$ on algebra, mutta ei ole σ-algebra.

Ratkaisu.

Merkitään $A_i := (a_i, b_i]$ ja toiselle jonolle

$$-\infty \leq c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \cdots \leq c_m \leq d_m \leq +\infty,$$

$B_j = (c_j, d_j]$. Joukot $A, B \in \mathcal{E}$, jos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} A_i \\ B &= \sum_{j=1}^{m} B_j, \end{aligned} \tag{0.1}$$

missä summa-merkintä tarkoittaa erillisten joukkojen unionia.

Todennetaan määritelmän ehdot:

i) $\Omega = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = (-\infty, \infty] \in \mathcal{E}$, $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{E}$ mielivaltaiselle a.

ii) $A_i^c = (-\infty, a_i] \cup (b_i, \infty] \in \mathcal{E}$.
Selvästi kun $A \in \mathcal{E}$ on olemassa esitys jolla

$$A = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R} \cup \{\ -\infty\},\ b_i \in \mathbb{R} \cup \{\ +\infty\}$$

ja $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Silloin

$$A^c = (-\infty, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \cdots \cup (b_{n-1}, a_n] \cup (b_n, +\infty]$$

jossa mahdollisesti $(a, b] = \emptyset$ kun $a \geq b$.

iii) Äärellisen unionin (äärellisen leikkauksen) kuuluttava joukkoon $\mathcal{E}$. Jos A, B kuten (0.1), niin leikkaukselle on: Ensiksi $A_i \cap B_j = (a, b] \in \mathcal{E}$, missä

$$a = \max(a_i, c_j)$$
$$b = \min(b_i, d_j)$$

Jos $a \geq b$, leikkaus on tyhjä joukko $\emptyset \in \mathcal{E}$.

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j).$$

Koska $B_j \cap B_k = \emptyset$, kun $j \neq k$ on

$$(A_i \cap B_j) \bigcap (A_i \cap B_k) = \emptyset$$

ja

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j).$$

Samoin, koska $A_i \cap A_j = \emptyset$ on

$$(\sum_k A_i \cap B_k) \bigcap (\sum_k A_j \cap B_k) = \emptyset,$$

ja

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j) \in \mathcal{E}.$$

$\mathcal{E}$ ei ole suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen. Jokainen joukko $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{E}$, mutta $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 1) \notin \mathcal{E}$.

11. Olkoon $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ saman tapahtumien joukon Ω:n kasvava algebrojen jono, jossa $\mathcal{A}_{n+1} \supseteq \mathcal{A}_n$.

    Osoita että yhdiste

    $$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

    on algebra.

    Jos korvataan "algebrat" "σ-algebroilla" tämä väite ei välttämättä päde, esitä vastaesimerkki.

    Ratkaisu.

- Selvästi $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
- Kun $A, B \in \mathcal{A}$, on olemassa $\bar{n}$ jolle $A, B \in \mathcal{A}_n$ kun $n \geq \bar{n}$, tästä seuraa $(A \cup B) \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ ja $(A \cap B) \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ ei ole välttämättä σ-algebra,
  Esimerkki:
  Olkoon $\Omega = [0, 1)$ ja

  $$\mathcal{A}_n = \sigma\Big(\big[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}\big), k = 0, \dots, 2^n - 1 \Big),$$

  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
  Joukko

  $$\begin{aligned} (0,1) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) \\ &= [\frac{1}{2}, 1) \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup \dots, \end{aligned}$$

  missä ensimmäinen joukko $\in \mathcal{A}_1$, toinen $\in \mathcal{A}_2$, jne. Siis $(0,1) \in \sigma(\cup_n \mathcal{A}_n)$. Mutta $(0,1)$ ei kuulu mihinkään joukkoon $\mathcal{A}_n$, eikä siten niiden yhdisteeseen.

12. Olkoon $A_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, tapahtumien jono.

- Osoita:

  $$\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \qquad \text{jossa } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- Osoita: $\liminf_n A_n := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n = \big(\limsup_n A_n^c\big)^c$ jossa $A^c = \Omega \setminus A$ on tapahtuman komplementti.
- Osoita

  $$\begin{aligned} &\limsup_n (A_n \cup B_n) = (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n), \\ &\liminf_n (A_n \cup B_n) = (\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n) \end{aligned}$$

- Osoita

  $$(\limsup_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) \subseteq \limsup_n (A_n \cup B_n) \subseteq (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$$

  Osoita jos $A_n \uparrow A$,eli $A_n \subseteq A_{n+1}$ ja $\bigcup_n A_n = A$, vai $A_n \downarrow A$,eli $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_n A_n = A$, molemmissa tapauksessa seuraa

  $$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow \\ &\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n \text{ s.e } \omega \in A_k \Leftrightarrow \\ &\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n \text{ s.e } \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \\ &\lim_n \sup_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \notin \limsup_n A_n \Leftrightarrow \\ &\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.e } \forall\, k \geq n \quad \omega \notin A_k \Leftrightarrow \\ &\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.e } \forall\, k \geq n \quad \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \\ &\lim_n \sup_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0.\end{aligned}$$

13. Olkoon $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ joka koostuu binäärijonoista $\omega = (\omega_n : n \in \mathbb{N}) \in \Omega$. Määritellään sylinteri-algebrat $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$, jossa $A \in \mathcal{F}_n$ jos ja vain jos on olemassa $A_n \subseteq \{0,1\}^n$ jolla

    $A = \{\omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A_n\}$.

    Olkoon

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \sigma\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n\Big),$$

    joka on pienin σ-algebra joka sisältää kaikki sylinteri-σ-algebrat.

    Olkoon

$$\begin{aligned} L &:= \big\{\omega : \exists \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i\big\} = \\ &= \big\{\omega : \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i = \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i\big\}\end{aligned}$$

    Osoita $L \in \mathcal{F}_\infty$, mutta $L \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Vihje: Osoita ensin että kaikille $q_1 < q_2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$,

$$\big\{\omega : \limsup_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i \in (q_1, q_2)\big\} \in \mathcal{F}_\infty \text{ ja}$$

$$\big\{\omega : \liminf_n n^{-1} \sum_{i=1}^n \omega_i \in (q_1, q_2)\big\} \in \mathcal{F}_\infty$$

R. Huomataan ensin että kun $A \subset \Omega$,
$A \in \mathcal{F}_n \iff A = \{\omega : (\omega_i, \dots, \omega_n) \in B_n\}$ jossa $B_n \subseteq \{0,1\}^n$.
Olkoon $X_n(\omega) = \omega_n \in \{0,1\}$.
$\big\{\omega : X_n(\omega) = 1\big\} = \big\{\omega : \omega_n = 1\big\} = \big\{\omega : (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) \in \{0,1\}^{n-1} \times \{1\}\big\} \in \mathcal{F}_n$
eli $X_n(\omega)$ on $\mathcal{F}_n$-mitallinen satunnaismuuttuja joka ei ole $\mathcal{F}_{n-1}$-mitallinen.
Olkoon

$$\bar{X}(\omega) := \limsup_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

Koska $\forall n \in \mathbb{N}, \omega \ \in \Omega$

$$\bar{S}(\omega) := \limsup_{N\to\infty} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) + N^{-1} \sum_{i=n+1}^N X_i(\omega) \right) = \limsup_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=n+1}^N X_i(\omega)$$

josta seuraa että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, satunnaismuuttuja $\bar{S}(\omega)$ ei ole $\mathcal{F}_n$-mitallinen.
Toisaalta $\bar{S}(\omega)$ on $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen, koska $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\bar{S}_n(\omega) := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$$

on $\mathcal{F}_n$-mitallinen ja siksi on myös $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen ja $\bar{S}(\omega) = \limsup_n \bar{S}_n(\omega)$ on $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen.
Samoin $\underline{\mathrm{S}}(\omega) = \liminf_n \bar{S}_n(\omega)$ on $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen, mutta jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ei ole $\mathcal{F}_n$-mitallinen.
ja myös tapahtuma

$$\Big\{\omega : \underline{\mathrm{S}}(\omega) = \bar{S}(\omega)\Big\} = \bigcup_{r,q \in \mathbb{Q}: r<q} \bigg(\Big\{\omega : r < \underline{\mathrm{S}}(\omega) < q\Big\} \cap \Big\{\omega : r < \bar{S}(\omega) < q\Big\} \bigg)$$

on $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen mutta $\forall n \in \mathbb{N}$ ei ole $\mathcal{F}_n$ mitallinen