HY Todennäköisyysteoria, syksy 2015, laskuharjoitukset 5 , ratkaisut (25.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, olkoon Olkoon $\xi_n(\omega)$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono jolla

$$P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = 0) = 1/2$$

ja

$$X(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) 3^{-n}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

(a) Osoita että $\forall \omega \in \Omega$ $X(\omega)$ on hyvin määritelty (eli sarjaa suppenee), ja $X(\omega) \in C \subset [0,1]$, jossa C on Cantorin joukko.

R. Se on jo osoitettu 4 laskuharjoituskerralla.

(b) Olkoon $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ kun $B \in \mathcal{B}([0,1])$.

Osoita että $P_X(B) = P(B)$ jossa P on Cantorin jakauma kertymäfunktiolla $F(t)$ joka määriteltiin viimeisellä harjoituskerralla tehtävässä 5.

R. Se on jo osoitettu 4 laskuharjoituskerralla.

(c) Laske odotusarvo $E(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

R. Kun $k = 1$,

$$E(X) = 2E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 3^{-n}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_n) 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = 1/2$$

koska

$$E(\xi_n) = 2P(\xi_n = 2) + 0P(\xi_n = 0) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 = 1/2$$

Summan ja odotusarvon järjestystä saa vaihtaa Fubinin tai monotonisen konvergenssin lauseen nojalla.

Kun $k = 2$, koska $\xi_n(\omega)^2 = \xi_n(\omega)$, $E(\xi_n^2) = E(\xi_n) = 1/2$,

$$E(X^2) = 4E\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 3^{-n}\right\}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m 3^{-m}\right\}\right) =$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E(\xi_n \xi_m) 3^{-(n+m)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_n) 3^{-2n} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m \le n} E(\xi_n) E(\xi_m) 3^{-(n+m)} =$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m \le n} 3^{-(n+m)} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\right)^2 = \frac{1/9}{1 - 1/9} + \left(\frac{1/3}{1 - 1/3}\right)^2$$

$$= 1/8 + (1/2)^2 = 3/8$$

ja

$$E(X^k) = 2^k E\left(\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty} \xi_{n_1} 3^{-n_1}\right\}\left\{\sum_{n_2=1}^{\infty} \xi_{n_2} 3^{-n_2}\right\}\dots\left\{\sum_{n_k=1}^{\infty} \xi_{n_k} 3^{-n_k}\right\}\right) =$$

$$2^k \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty} E\big(\xi_{n_1}\xi_{n_2}\dots\xi_{n_k}\big)3^{-(n_1+n_2+\cdots+n_k)} =$$

$$2^k \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m} \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=m} E\big(\xi_{n_1}\xi_{n_2}\dots\xi_{n_k}\big) = \dots$$

josta tulee kombinaatorinen tehtävä.

Vaihtoehtoinen menetelmä momenttigeneroiva funktiolla: kun $t \in \mathbb{R}$ olkoon

$$\begin{aligned} m_X(t) &:= E\big(\exp(tX)\big) = E\left(\exp\left(2t\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n 3^{-n}\right)\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} E\big(\exp\big(3^{-n}2t\xi_n\big)\big) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\exp(3^{-n}2t)}{2} \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\big(1+\exp(3^{-n}2t)\big) - \log(2)\right\}\right) \end{aligned}$$

ja lähteä derivoimaan

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} m_X(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d^k}{dt^k} E\big(\exp(tX)\big)\Big|_{t=0} = E\left(\frac{d^k}{dt^k}\exp(tX)\right)\Big|_{t=0} \\ &= E\left(\frac{d^k}{dt^k}\exp(tX)\right)\Big|_{t=0} = E\left(X^k \exp(tX)\right)\Big|_{t=0} = E\big(X^k\big) \end{aligned}$$

jossa derivaatan ja odotusarvon järjestyksen vaihto on perusteltavissa.

2. Olkoon P ja Q todennäköisyyksiä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, jotka ovat ekvivalentteja, eli kun $A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \Longleftrightarrow P(A) = 0$, eli $P \ll Q$ ja $Q \ll P$. Silloin merkitään $P \sim Q$.

   Olkoon

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega)$$

   uskottavuusosamäärä jolla pätee $E_Q(X) = E_P(ZX)$ kaikille satunnaismuuttujille $X \geq 0$.

Osoita että

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = 1/Z(\omega)$$

eli kaikille satunnaismuuttujille $X \geq 0$ $E_P(X) = E_Q(XZ^{-1})$

R.

$$E_Q(XZ^{-1}) = E_P(XZ^{-1}Z) = E_P(X)$$

3. Gaussisesta jakaumasta.

(a) Osoita

$$2\pi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)^2$$

Vihje: Muuttujan vaihdolla $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, $r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$.

(b) On olemassa satunnaismuuttuja $G(\omega)$ jolla

$$P(G \leq x) = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

G:n jakauma kutsutaan standardiseksi Gaussiseksi jakaumaksi.

Vihje Valitse todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) Mikä on $G(\omega)$:n jakauman tiheysfunktio ?

Ratkaisut.

i. Käytetään vihjeen muuttujanvaihtoa $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, $r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$. ja merkitään Jakobiaania

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix},$$

jonka determinantti on

$$|J_{x,y}| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2}\Big)|J_{x,y}|dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2}\Big)rdr\, d\theta = \\
&\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{r^2}{2}\Big)d\big(r^2/2\big) = \\
&2\pi \int_0^{\infty} \exp(-x)dx = 2\pi
\end{aligned}
$$

ii. Koska $\Phi(x)$ on jakauman kertymäfunktio väite seuraa suoraan Caratheodoryn lauseesta.

iii. standardi Gaussisen jakauman tiheysfunktio saadaan suoraan derivoimalla kertymäfunktion

$$
\phi(x) := \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)
$$

(d) Olkoon $m \in R$ ja $\sigma > 0$, ja $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

i. Laske X:n jakauman kertymäfunktio $P(X \leq x)$.
R.

$$
\begin{aligned}
&P(X \leq x) = P\Big(G \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)
\end{aligned}
$$

ii. Laske X:n jakauman tiheysfunktio. **R.**

$$
\begin{aligned}
&p_X(x) = \frac{d}{dx}P(X \leq x) = \frac{d}{dx}P\big(G \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\big) = \frac{d}{dx}\Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big) \\
&= \sigma^{-1}\phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)
\end{aligned}
$$

iii. laske Radon-Nikodymin derivaatta (uskottavuusosamäärä)

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x)$$

jossa $P_X(B) = P(X \in B)$ ja $P_G(B) = P(G \in B)$.
Vihje Uskottavuusosamäärä toteuttaa mitanvaihdon kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP_X}{dP_G}(x) P_G(dx)$$

kaikille Borel-mitallisille funktioille $h(x) \geq 0$.
R.

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x) = \frac{p_X(x)}{p_G(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\biggr) \bigg/ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\biggl(-\frac{x^2}{2}\biggr)$$
$$= \frac{1}{\sigma} \exp\biggl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2}\biggr)$$

iv. Laske myös uskottavuusosamäärä

$$\frac{dP_G}{dP_X}(x)$$

R.

$$\frac{dP_G}{dP_X}(x) = \biggl(\frac{dP_X}{dP_G}(x)\biggr)^{-1} = \sigma \exp\biggl(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2}{2}\biggr)$$

v. Laske odotusarvo

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \int_\Omega \exp(\lambda G(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x) P_G(dx)$$

R. “Neliön täyttämällä”

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-\frac{x^2}{2} + \lambda x\bigr) dx = \frac{\exp\Bigl(\frac{\lambda^2}{2}\Bigr)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-\frac{(x-\lambda)^2}{2}\bigr) dx$$
$$= \exp\biggl(\frac{\lambda^2}{2}\biggr) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-\frac{y^2}{2}\bigr) dy = \exp\biggl(\frac{\lambda^2}{2}\biggr)$$

vi. Laske myös odotusarvo $E_P(\exp(\lambda X))$ jossa $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

R.

$$E_P(\exp(\lambda X)) = E_P\big(\exp\big(\lambda(m+\sigma G)\big)\big)$$
$$= \exp(\lambda\mu)E_P\big(\exp\big(\lambda\sigma G\big)\big) = \exp\left(\lambda\mu + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)$$

4. Olkoon $G_i(\omega)$ $i=1,2$, P-riippumattomia Gaussisia satunnaismuuttujat, jossa $G_i \sim \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,2$.

   Olkoon $W(\omega) = G_1(\omega)+G_2(\omega)$. Eli W:n jakauma on kahden Gaussisten satunnaismuuttujen konvoluutio.

   Osoita että $W(\omega)$ on Gaussinen ja laske sen tiheysfunktio.

   ,**R.** Lasketaan jakaumien konvoluutio. Koska $G_i = \mu_i + G_i'$ jossa $G_i' \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$, voit olettaa että $\mu_i = 0$. Neliön täydentämällä,

$$p_W(w) = \int_{\mathbb{R}} p_{G_1}(w-x)p_{G_2}(x)dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\sigma_2^2(w^2+x^2-2wx)-\sigma_1^2x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_1^2} + \frac{w^2\sigma_2^2}{2\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(x-\frac{\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}w)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)dx$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{w^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left(-\frac{w^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\phi\left(\frac{w}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$$

   joka on Gaussisen jakauman tiheysfunktion odotusarvolla 0 ja varianssilla $(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ $\square$

5. Olkoon $N_i(\omega)$, $i=1,\dots,d$ P-riippumattomia Poisson(θ_i) satunnaismuuttujia jossa $\theta_i > 0$, $i=1,\dots,d$. Olkoon

$$X(\omega) = N_1(\omega) + \cdots + N_d(\omega)$$

   Osoita että X on Poisson jakautunut parametrilla $(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$. **R.**

Kun $n = 2$ (sitten se seuraa induktiolla),

$$P(N_1 + N_2 = k) = \sum_{\ell=0}^{k} P(N_1 = \ell, N_2 = k - \ell) = \sum_{\ell=0}^{k} P(N_1 = \ell)P(N_2 = k - \ell)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \exp^{-\theta_1} \frac{\theta_1^\ell}{\ell!} \exp^{-\theta_2} \frac{\theta_2^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

$$= \exp(-(\theta_1 + \theta_2)) \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0^k} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \theta_1^\ell \theta_2^{k-\ell} \exp(-(\theta_1 + \theta_2)) \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0^k} \binom{k}{\ell} \theta_1^\ell \theta_2^{k-\ell}$$

$$= \exp(-(\theta_1 + \theta_2)) \frac{(\theta_1 + \theta_2)^k}{k!}$$

jossa sovellettiin Newtonin binomikaava.

6. Olkoon $X_i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ P-riippumattomia ja samoin jakatuneita binääri satunnaismuuttujia joilla

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p, \quad p \in (0, 1)$$

Osoita että $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ on binomiaalisesti jakautunut, eli

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

R.

$$P(S_n = k) = \sum_{\ell_1 + \cdots + \cdots + \ell_n = k : \ell_i \in \{0,1\}} P(X_1 = \ell_1, \dots X_n = \ell_n) =$$

$$\sum_{\ell_1 + \cdots + \cdots + \ell_n = k : \ell_i \in \{0,1\}} P(X_1 = \ell_1, \dots X_n = \ell_n)$$

$$\sum_{\ell_1 + \cdots + \cdots + \ell_n = k : \ell_i \in \{0,1\}} P(X_1 = \ell_1) \dots P(X_n = \ell_n) = p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$$

7. Olkoon Q toinen todennäköisyysmitta jonka suhteen $X_i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ Q-riippumattomia ja samoin jakatuneita binääri satunnaismuuttujia joilla

$$Q(X_i = 1) = 1 - Q(X_i = 0) = q, \quad q \in (0, 1)$$

Osoita että $P \sim Q$ (eli $P \ll Q$ ja $Q \ll P$) σ-algebrassa $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Laske uskottavuusosamäärä $\mathcal{F}_n$ σ-algebrassa joka on muotoa

$$Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) = z_n(S_n)$$

jossa $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Borel mitallinen funktio.

R.

$$Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{p}{q}\right)^{X_i(\omega)} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{1-X_i(\omega)} \right\}$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n(\omega)} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-S_n(\omega)} = z_n(S_n(\omega))$$

8. Olkon satunnaismuuttuja $X(\omega) \geq 0$, ja olkoon $q > 0$.

Osoita:

$$E_P\big(X^q\big) = q \int_0^\infty t^{q-1} P(X > t)dt = E_P\big(X^q\big) = q \int_0^\infty t^{q-1} P(X \geq t)dt$$

R.

$$E_P(X^q) = \int_0^\infty x^q F(dx) = \int_0^\infty \left(\int_0^x q y^{q-1} dy \right) F(dx) =$$
$$q \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) y^{q-1} dy \right) F(dx) =$$
$$q \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}(x > y) F(dx) \right) y^{q-1} dy = q \int_0^\infty \left(\int_y^\infty F(dx) \right) y^{q-1} dy =$$
$$q \int_0^\infty (1 - F(y)) y^{q-1} dy =$$
$$q \int_0^\infty P(X > y) y^{q-1} dy =$$
$$q \int_0^\infty P(X \geq y) y^{q-1} dy - q \int_0^\infty P(X = y) y^{q-1} dy =$$
$$q \int_0^\infty P(X \geq y) y^{q-1} dy$$

koska joukko

$$\{y \in \mathbb{R} : P(X = y) > 0\}$$

on numeroituva ja sen Lebesgue mitta on nolla.