HY Todennäköisyysteoria, syksy 2015, laskuharjoitukset 4 (18.2.2015)

1. Olkoon $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei-vähenevä funktio, eli $G(s) \le G(t)$ kun $s \le t$. Osoita että G on Borel mitallinen.

   R. Olkoon $I = (-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$.

   Silloin käänteiskuvalle

   $G^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \in I\} = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \le t\} = \{x \in \mathbb{R} : x \le \overleftarrow{G}(t)\}$

   tai

   $$G^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} : x < \overleftarrow{G}(t)\}$$

   jossa

   $$\overleftarrow{G}(t) = \sup\{x : G(x) \le t\}$$

   on $G(x)$ funktion yleistetty käänteisfunktio eli $G^{-1}(I)$ on väli joka tapauksessa, ja erityisesti se on Borelin joukko. Olkoon

   $$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ jolla } G^{-1}(B) \text{ on Borelin joukko } \}$$

   $\mathcal{D}$ on Dynkinin luokka, eli suljettu komplementtin ja monotoonisen rajankkäynnin suhteen.

   Koska se sisältää kaikki välit $(-\infty, t]$,$t \in \mathbb{R}$ jotka muodostuvat π-luokkaa (suljettu) leikkauksen suhteen, se sisältää myös välien virittämää σ-algebra, joka on Borelin σ-algebra ja väite on osoitettu.

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_n(\omega)$ $n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujen jono jolla

   $$\sum_{n=1}^{\infty} E_P\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

   jollekin $p > 0$.

   Osoita: $\forall K \in \mathbb{N}$

   (a)

   $$\sum_{n=0}^{\infty} P\big(|X_n| > 1/K\big) \le K^p \sum_{n \to \infty} E_p\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

Vihje: muista Chebychevin epäyhtälö.
R $P(|X_n| > 1/K) = P(|X_n|^p > K^{-p}) \leq K^p E_P(|X_n|^p)$ josta seuraa

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > 1/K) \leq K^p \sum_{n=1}^{\infty} E_P(|X_n|^p) < \infty$$

(b) Osoita:

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 \qquad P\text{-melkein varmasti} .$$

Vihje muista Borel Cantelli lemma (kumpi ?).
R
Borel Cantellin lemmasta, $\forall K \in \mathbb{N}$,

$$P(\limsup_n \{|X_n| > 1/K\}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\iff P(\liminf_n \{|X_n| \leq 1/K\}) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\iff P(\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \{|X_m| \leq 1/K\})$$
$$= P\Big(\{\omega : \forall k \in \mathbb{N} \exists n = n(\omega) : \forall m \geq n |X_m| \leq 1/K\}\Big) = P\big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}\big)$$

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttujat $U_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$ P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0, 1]$, kertymäfunktiolla

$$F_1(t) = P(U_1 \leq t) = t, t \in [0, 1]$$

Olkoon

$$M_n(\omega) = \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

jonon juokseva maksimi.

(a) Laske M_n jakauman kertymäfunktio

$$F_n(t) = P(M_n \leq t), \quad t \in [0, 1]$$

R Riipumattomuuden nojalla,

$$P(M_n \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t)$$
$$= P(X_1 \leq t)^n = t^n$$

(b) Osoita M_n jakauma on absoluttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja laske sen tiheysfunktio.

R M_n jakauma on absoluttisesti jatkuva koska kertymäfunktiolla on derivaatta

$$p_{M_n}(t) = \frac{d}{dt}P(M_n \leq t)\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$$

joka on jakuman tiheysfunktio Lebesgue mitan suhteen.

(c) Osoita

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\omega) = 1 \qquad P\text{-melkein varmasti.}$$

Huomataan että $\forall\omega$, $M_n(\omega) \leq M_{n+1}(\omega) \leq 1$ ja siksi $\forall\omega$ on olemassa monotoninen raja $M_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} M_n(\omega) \leq 1$.

Koska $\forall t \in [0,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(M_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t} < \infty$$

siitä seuraa että $P(\limsup_n\{\ M_n \leq t\}) = 0\ \forall t < 1$, ja siksi $\lim_{n\uparrow\infty} M_n(\omega) = 1$ P-melkein varmasti.

4. Olkoon P ja P' todennäköisyysmittoja todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(a) Olkoon $\alpha \in [0,1]$. Osoita että todennäköisyyskien konveksi kombinaatio

$$Q_\alpha(A) = \alpha P(A) + (1-\alpha)P'(A)$$

on todennäköisyys, ja kun $0 < \alpha < 1$,

$$Q_\alpha \gg P \text{ ja } Q_\alpha \gg P'$$

eli P ja P' ovat absoluttisesti jatkuvia Q_α:n suhteen.

R. Selvästi kun $Q_\alpha(A) = 0$ ja $0 < \alpha < 1$, myös $P(A) = Q(A) = 0$.

(b) Olkoon $\alpha \in (0,1)$ ja

$$\zeta(\omega) = \frac{dP}{dQ_\alpha}(\omega), \quad \zeta'(\omega) = \frac{dP'}{dQ_\alpha}(\omega),$$

uskottavuus-osamäärät (Radon-Nikodym derivaatat), ja olkoon

$$\mu(A) = \int_\Omega \big(\zeta(\omega) \vee \zeta'(\omega)\big)\mathbf{1}_A(\omega)Q_\alpha(d\omega)$$

jossa $x \vee y = \max\{x, y\}$.

(c) Osoita että μ on pienin mitta jolla

$$\mu(A) \geq P(A) \vee P'(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

R Olkoon $\alpha = 1/2$. Huomataan ensin että $\zeta(\omega)+\zeta'(\omega) = 2$, koska $P(A) + P'(A) = 2Q_{1/2}(A)\ \forall A$.

$$\mu(A) = \int_\Omega \big(\zeta(\omega) \vee \zeta'(\omega)\big)\mathbf{1}_A(\omega)Q_{1/2}(d\omega) \geq \int_\Omega \zeta(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)Q_{1/2}(d\omega) = P(A)$$

samoin $\mu(A) \geq P'(A)$.
Olkoon $\nu(A)$ jolla $\nu(A) \geq P(A) \vee P'(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$. Silloin $\nu \gg P$ ja $\nu \gg P\prime$, ja myös $\nu \gg Q_{1/2}$. Olkoon

$$\ell(\omega) = \frac{dQ_{1/2}}{d\nu}(\omega)$$

Silloin

$$\mu(A) = \int_\Omega \big(\zeta(\omega) \vee \zeta'(\omega)\big)\ell(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\nu(d\omega)$$

ja

$$\nu_(A) \geq P(A) \vee P(A')$$

Osoitamme että $w(\omega) := (\zeta(\omega) \vee \zeta'(\omega))\ell(\omega) \leq 1$ ν-nolla mittaisen joukon ulkopuolella.

$$B = \{\omega : \zeta(\omega)\ell(\omega) > 1\} \cup \{\omega : \zeta(\omega) > \zeta'(\omega)\}$$
$$B' = \{\omega : \zeta'(\omega)\ell(\omega) > 1\} \cup \{\omega : \zeta'(\omega) \geq \zeta'(\omega)\}$$

Seuraa että $B \cap B' = \emptyset$

$$\mu(B) = P(B) \geq \nu(B), \quad \mu(B') = P'(B') \geq \nu(B')$$

ja koska epäyhtälöt ovat aitoja silloin kun $\nu(B) > 0$ tai vastaavasti $\nu(B') > 0$, siitä seuraa että $\nu(B \cup B') = \nu(B) + \nu'(B) = 0$, eli $w(\omega) \leq 1$ ν-nolla mittaisen joukon ulkopuolella.

(d) Osoita että $\mu(\Omega) = 1 \iff P = P'$
R Olkoon

$$C = \{\omega : \zeta(\omega) > \zeta'(\omega)\}, \quad C' = \{\omega : \zeta'(\omega) > \zeta(\omega)\}$$

Selvästi $C \cap C' = \emptyset$ ja

$$C \cup C' = \big\{\omega : \zeta(\omega) \neq \zeta(\omega')\big\}$$

Silloin

$$\mu(C) = P(C) \geq P'(C) \text{ ja } \mu(C') = P'(C') \geq P(C')$$

jossa epäyhtälöt ovat aitoja silloin kun $\mu(C) > 0$ tai $\mu(C') > 0$.
Tästä seuraa

$$\mu(\Omega) = \mu(C) + \mu(C') + \mu(\{\zeta = \zeta'\}) =$$
$$P(C) + P'(C') + P(\{\zeta = \zeta'\}) = P(C) + P'(C') + P'(\{\zeta = \zeta'\}) \geq$$
$$\big(P(C) + P(C') + P(\{\zeta = \zeta'\})\big) \vee \big(P'(C) + P'(C') + P'(\{\zeta = \zeta'\})\big) = 1 \vee 1 = 1$$

jossa epäyhtälö on aito jos ja vain jos $\mu(\{\zeta \neq \zeta'\}) > 0$.

5. Olkoon $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, eli $F(t)$ on ei-vähenevä oikealta jatkuva, $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$. Merkitään $\Delta F(t) = F(t+) - F(t-) = F(t) - F(t-) \geq 0$.

   (a) Osoita että epäjatkuvuuden pisteiden joukko

   $$\big\{t : \Delta F(t) > 0\big\}$$

   on korkeintaan numeroituva

   (b) Osoita:

   $$F(t) = F^{(c)}(t) + \sum_{r \leq t} \Delta F(r)$$

   jossa $F^{(c)}$ on ei-vähenevä ja jatkuva.

   (c) Osoita että

   $$F^{(c)}(t) = F^{(a)}(t) + F^{(s)}(t)$$

   jossa

   $$F^{(a)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f^{(a)}(r)dr$$

   jossa $f^{(a)} \geq 0$ on Borel mitallinen, ja

   $$F^{(s)}(t) = \mu^{(s)}\big((-\infty, t]\big)$$

   jossa $\mu^{(s)}$ on singulaarinen Lebesgue mitan suhteen.

6. (Cantorin joukko ja Cantorin jakauma) Olkoon $\Omega = C_0 = [0,1]$, varustettuna Lebegue mitalla P_0 jolla $F_0(t) = P_0([0,t]) = t$ kun $t \in [0,1]$.

Olkoon

$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$,

$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$.

...

$C_n = C_{n-1}1/3 + (2/3 + C_{n-1}1/3)$, $n \in \mathbb{N}$.

jossa kun $A \subseteq [0,1]$ merkitään

$$(a + bA) = \big\{y = (a + bx) : x \in A\big\}$$

(a) Osoita: tapahtumien jono C_n on ei-kasvava eli $C_n \supseteq C_{n+1} \downarrow C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
C kutsutaan Cantorin joukoksi.

(b) Osoita että Cantorin joukko C on kompakti ja Borel mitallinen.

(c) Jokaisella $x \in [0,1]$ on esitys $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k$ jossa $\xi_k \in \{\ 0,1,2\}$.
Osoita:

$$C_n = \left\{x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k \ : \ \xi_k \in \{0,2\}\ \forall 1 \le k \le n\right\}$$
$$C = \left\{x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k \ : \ \xi_k \in \{0,2\}\ \forall k \ge 1\right\} \neq \emptyset,$$

osoita myös että on olemassa bijektio $C \longrightarrow [0,1]$ josta seuraa että C ei ole numeroituva.

(d) Osoita: $P_0(C_n) = (2/3)^n$, jossa P_0 on Lebesgue mitta.

(e) Määritellän funktioiden jono $F_n : [0,1] \to [0,1]$, jolla kun $t \in [0,1]$,

$$F_0(t) = t,$$
$$\dots$$
$$F_n(t) = (3/2)^n \int_0^t \mathbf{1}_{C_n}(s)ds$$

Osoita $F_n(t)$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, $F_n(t)$ on jatkuva, ja vastaava todennäköisyysjakauma $P_n(t)$ on absolutisesti jatkuva Lebesgue mitan P_0:n suhteen.

(f) Osoita $\forall t \in [0,1]$, $\exists$

$$F(t) := \lim_{n\to\infty} F_n(t)$$

(g) Osoita että $P_0(C) = 0$ jossa P_0 on Lebesgue mitta.

(h) Osoita että funktio $F(t)$ on jatkuva.
Vihje muista Ascoli Arzela lause.

(i) Osoita että $F(t)$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio. Vastaava todennäköisyys P kutsutaan Cantorin mitaksi.

(j) Osoita että $P(C) = 1 = P([0,1])$ ja Cantorin mitta P on singulaarinen Lebesgue mitan P_0 suhteen.

(k) Osoita että Cantorin mitalla P pätee

$$P(\{t\}) = \Delta F(t) = 0 \quad \forall t,$$

eli Cantorin mitalla ei ole pistemassoja.

R.

Induktiolla, $P_0(C_0) = 1$, $P_0(C_1) = 2/3$ ja $P_0(C_n) = P_0(C_{n-1})2/3 = (2/3)^n$, ja koska $C_n \downarrow C$ seuraa σ-additiividuusesta että $P_0(C) = \lim_{n\to\infty} P_0(C_n) = \lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$.

Kun $x \in C$,

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\omega_k \ : \ \omega_k \in \{0,1\}$$

ja on olemassa bijektio $x \to u \in [0,1]$ jossa

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\omega_k \ : \ \omega_k \in \{0,1\}$$

siksi C:lla ja välillä $[0,1]$ on sama kardinaliteetti, ja ovat molempia epänumeroituvia.

Olkoon $(\xi_k(\omega) : k \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita binääri satunnaismuuttuja jolla

$$P(\xi_k = 1) = 1 - P(\xi_k = 0) = 1/2 \quad \forall k$$

ja $U(\omega)$ on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$ ja P-riippumaton $(\xi_k(\omega))$ jonosta, eli $P(U \le t) = t$ kun $t \in [0,1]$.

Olkoon

$$X_n(\omega) = 2\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) 3^{-k}$$
$$Y_n(\omega) = X_n(\omega) + U(\omega)3^{-n}$$

kertymäfunktioilla

$$F_n(t) = P(Y_n \le t) \quad \text{ja } G_n(t) = P(X_n \le t)$$

Seuraa että

$$F_n(t) = (3/2)^n \int_0^t \mathbf{1}_{C_n}(s)ds$$

on absoluttisesti jatkuva ja $G_n(t)$ on palottainvakio porrasfunktio, jolla $\Delta G_n(x) \in \{0, 2^{-n}\}$.

Koska

$$0 \le X_{n-1}(\omega) \le X_n(\omega) \le Y_n(\omega) \le 1$$

seuraa että

$$G_{n-1}(t) \ge G_n(t) \ge F_n(t) \ge G_n(t) - 2^{-n} \tag{0.1}$$

Koska $X_n(\omega)$ on ei vähenevä ja rajoitettu on olemassa monotoninen raja $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \le 1 \ \forall \omega \in \Omega$, ja koska $Y_n(\omega) - X_n(\omega) = 2^{-n}U(\omega) \to 0$, seuraa että myös $Y_n(\omega) \to X(\omega)$, vaikka jono $Y_n(\omega)$ ei ole monotoninen.

Huomataan että $\forall n, m \ge N$,

$$\sup_{t\in[0,1]} |G_n(t) - G_m(t)| \le 2^{-N}$$

ja epäyhtälöistä (0.1) seuraa että

$$\sup_{t\in[0,1]} |F_n(t) - F_m(t)| \le 2 \times 2^{-N},$$

eli $(F_n : n \in \mathbb{N})$ on jatkuvien funktioiden Cauchy jono $C([0,1])$ avaruudessa varustettuna supremum normilla:

$$\| f \|_\infty = \sup\big\{ |f(t)| : \ t \in [0,1] \big\}$$

Koska $C([0,1])$ varustettuna supremum-normilla on täydellinen metrinen avaruus, kaikilla Cauchy jonoilla on rajaarvo joka on jaktuva funktio ja väite seuraa.

Tätä voidaan osoittaa myös puhtaalla todennäköisyysteorian argumenttilla.

Osoitan että koska $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ P-melkein varmasti seuraa että $Y_n(\omega) \xrightarrow{d} Y(\omega)$ jakauman mielessä joka tarkoittaa että $F_n(t) \to F(t) = P(Y \leq t)$ kaikissa pisteissä jossa $F(t)$ on jatkuva. Toisaalta $F(t)$ on jatkuva, koska jos t^0 olisi epäjatkuuvuspiste jolla $\Delta F(t^0) = F(t^0) - F(t^0-) = P(Y = t^0) > 0$, siitä seuraisi että $t^0 \in C$ kuuluisi Cantorin joukkoon ja sillä olisi esitys jossa

$$t^0 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^0 3^{-k}$$

jossa $x_k^0 \in \{0,1\}$.

Mutta tapahtumalla $\{\omega : Y(\omega) = t^0\} = \{\omega : \xi_k(\omega) = x_k^0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$, on todennäköisyys

$$P\left(\bigcup_n \{\ \xi_k = x_k^0\}\ \right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$$

eli Y satunnaimuuttujan jakaumalla ei voi olla pistemassoja ja sen kertymäfunktio $F(t)$ on jatkuva.

Jakaumien konvergenssi esitetään Todennäköisyysteoria II kurssilla.