HY Todennäköisyysteoria I, kevät 2015, laskuharjoitukset 3 (11.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $U(\omega)$ satunnaismuuttuja joka on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$, eli sen jakaunan kertymäfunktio on

$$F_U(t) := P\big(\{\omega : U(\omega) \le t\}\big) = \begin{cases} 0 & , \ t \le 0 \\ t & , \ 0 < t \le 1 \\ 1 & , \ t > 1 \end{cases}$$

Laske odotusarvot

$$E_P\big(U^r\big), \text{ ja } E_P\big(\exp(rU)\big), \quad r \in \mathbb{R}.$$

R.

$$\int_\Omega U^r(\omega)P(d\omega) = \int_\mathbb{R} u^r F_U(du) = \int_0^1 u^r dr = \frac{1^{r+1} - 0^{r+1}}{r+1} = 1/(r+1), \quad \text{kun } r > -1$$
$$= +\infty \quad \text{kun } r \le -1$$

2. (a) Todista Chebychevin epäyhtälö: jos $X(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti,

$$P(X > t) \le \frac{E_P\big(X\big)}{t}$$

Vihje

$$0 \le t\,\mathbf{1}(X(\omega) > t) \le X(\omega)$$

(b) Osoita myös Chentsovin epäyhtälö

$$P(X > t) \le \inf_{\lambda > 0}\Big\{\exp(-\lambda t)E_P\big(\exp(\lambda X)\big)\Big\}$$

R Lasketaan odotusarvo

$$0 \le tP(X > t) \le E_P(X)$$

Olkoon $Y = \exp(\lambda X)$. Koska $x \mapsto y = e^{\lambda x}$ on kasvava kun $\lambda > 0$, seuraa $\forall \lambda > 0$,

$$P(X > t) = P(Y > \exp(\lambda X)) \le E_P(\exp(\lambda X))e^{-\lambda t}\,.$$

3. Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega)$ Poisson(θ) jakautunut, jossa $\theta > 0$ on parametri, eli

$$P_\theta\big(X = n\big) = \exp(-\theta)\frac{\theta^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

Osoita että P on todennäköisyys.

R Seuraa exponentiaalisen funktion Taylorin kehitelmästä

$$\exp(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$$

(b) Laske $E_\theta(\exp(\lambda X))$, $\forall \lambda > 0$.

R Olkoon $\lambda > 0$.

$$E_\theta(\exp(\lambda X)) = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n}\frac{\theta^n}{n!} = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(\exp(\lambda)\theta\big)^n}{n!} = \exp\big(\theta\big(e^\lambda - 1\big)$$

(c) Arvioi yläpuolelta $P_\theta\big(X > t\big)$ Chentsovin epäyhtälöllä.

$$P_\theta\big(X > t\big) \le \inf_{t>0}\Big\{\exp(-t)E_P\big(\exp(tX)\big)\Big\} = \inf_{t>0}\Big\{\exp\big(\theta e^t - \theta - t\big)\Big\}$$

koska minimipistessa t^*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\theta e^t - \theta - t\big) = 0$$

seuraa että minimi saavutetaan kun $t^* = -\log(\theta)$ ja sijoittamalla saadaan arvio

$$P_\theta\big(X > t\big) \le \exp(1 - \theta + \log\theta) = \theta\exp(1 - \theta)$$

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $S_n(\omega)$ binomiaalisesti-jakautunut parametreilla $n \in \mathbb{N}$ ja $p \in (0,1)$, eli $X(\omega) \in \{0, 1, \dots, n\}$ P-melkein varmasti jossa

$$P_{S_n}(\{k\}) = P\Bigg(\{\omega : S(\omega) = k\}\Bigg) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 1, 0, \dots, n$$

Newtonin bimomi kaavasta

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

jossa $q = (1-p)$, seuraa että $P_X(\{0, 1 \dots, n\}) = 1$

(a) Laske momentti-generoiva funktio

$$g_{S_n}(\theta) := E_P\big(\exp(\theta S_n)\big), \quad \theta > 0$$

(b) Olkoon $p < a < 1$. Osoita suurten poikkeamien yläraja:

$$P\big(S_n > an\big) \le \left(\frac{p}{a}\right)^{na}\left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{n(1-a)} = \exp\left\{-n\left(a\log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a)\log\left(\frac{1-a}{1-p}\right)\right)\right\}$$
$$= \exp\big\{-nK(P_a|P_p)\big\}$$

jossa (tiedoksi vaan)

$$K(P_a|P_p) := \sum_{\omega=0,1} P_a(\{\omega\})\log\left(\frac{P_a(\{\omega\})}{P_p(\{\omega\})}\right) = a\log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a)\log\left(\frac{1-a}{1-p}\right)\Bigg)$$

on binääri todennäköisyyden P_p:n suhteellinen entropia binääri todennäkösyyden P_a:n suhteen, jossa $P_p(\{1\}) = 1 - P_p(\{0\}) = p$, $p \in (0,1)$.

Vihje: kun $\theta > 0$

$$P(S_n > an) = P\big(\exp(\theta S_n) > \exp(\theta an)\big)$$

Käytä Chentsovin epäyhtälö ja minimoi yläraja derivoimalla θ:n suhteen.

Ratkaisu.

(a) Oletetaan, että funktio $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on kasvava ja $g(x) \neq 0$, kun $x \neq 0$.
Jos $t > 0$, niin joukossa $\{\omega : X \ge t\}$ on $g(X) \ge g(t)\mathbf{1}_{\{X \ge t\}}(\omega)$. $\Rightarrow$

$$E(g(X)) \ge E(g(t)\mathbf{1}_{\{x\ge t\}}(\omega)) = g(t)P\{X \ge t\}.$$

Koska $g(t) > 0$, tästä seuraa

$$P\{x \ge t\} \le \frac{E(g(X)}{g(t)}.$$

Valitsemalla $g(x) = x$, saadaan tehtävän väite.

(b) $g(x) = e^{\lambda x}$ on kasvava ja posiitivinen. Edellisestä kohdasta saadaan

$$P\{X \ge t\} \le \frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda t}},$$

joka on voimassa kaikilla $\lambda > 0$, josta väite. (Odotusarvon on mukava olla olemassa.)

(c) Poisson(θ) jakautuneelle satunnaismuuttujalle X on momenttigeneroiva funktio

$$\begin{aligned} M_X(\lambda) := E(e^{\lambda X}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\ &= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\lambda}\theta)^k}{k!} = e^{\theta(e^{\lambda}-1)} \end{aligned}$$

(d) Chebyshev $\Rightarrow$

$$P_\theta\{X \geq t\} \leq \frac{M_X(\lambda)}{e^{\lambda t}} = e^{\theta(e^{\lambda}-1)-\lambda t}.$$

exponentilla $f(\lambda) := \theta(e^{\lambda} - 1) - \lambda t$ on minimikohta, joka löytyy suoraan derivoimalla

$$f'(\lambda) = \theta e^{\lambda t} - t = 0,$$

josta $\hat{\lambda} = \log(\frac{t}{\theta})$ (oletettava, että $t > \theta$). $e^{f(\lambda)}$ toisen derivaatan

$$f''(\lambda)e^{f(\lambda)} + (f'(\lambda))^2 e^{f(\lambda)}$$

positiivisuuteen riittää, että $f''(\hat{\lambda}) = \theta e^{\hat{\lambda}} > 0$, mikä on ja ollaan minimikohdassa ja

$$P_\theta\{X \geq t\} \leq e^{\theta(e^{\hat{\lambda}}-1)-\hat{\lambda} t} = e^{(t-\theta)} \left(\frac{\theta}{t}\right)^t.$$

Jos $t < \theta$ f voidaan kirjoittaa esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\theta + t - t)(e^{\lambda} - 1) - \lambda t \\ &= (\theta - t)(e^{\lambda} - 1) + t(e^{\lambda} - 1 - \lambda) \\ &= (\theta - t)(e^{\lambda} - 1) + t(\frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 + \ldots), \end{aligned}$$

joka on kahden positiivisen kasvavan ($\lambda > 0$) funktion summana positivinen, kasvava $\Rightarrow$ $e^{f(\lambda)}$ surin alaraja saadaan antamalla $\lambda \to 0$.

5. Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, siis $E_P(|X|) < \infty$. Osoita että

$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty \,.$$

Vihje

$$0 \le |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega) \le b|) \uparrow |X(\omega)|$$

kun $n \uparrow \infty$.

Ratkaisu
Koska $|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \le n) \uparrow |X(\omega)|$ $\forall\omega$ kun $n \uparrow \infty$ monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa

$$E_P(|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| > n)) = E_P(|X(\omega)|) - E_P(|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \le n)) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty$$

6. Tehtävä numeroituvuudesta:

   (a) Osoita: tauluun=$[0,1]^2$ mahtuu ylinumeroituva määrä erillisiä nollamerkin='O' eli ympyrän muotoisia käyriä, (siis ympyrä-käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).

   (b) Osoita että taulussa = $[0,1]^2$ tai vaikka = $\mathbb{R}^2$ avaruudessa mahtuu korkeintaan numeroituva määrää erillisiä '8' eli '∞'-merkkin muotoisia käyriä (siis '8'- muotoisia käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).

Ratkaisu

Koska $\mathbb{R}^2$ on numeroituva yhdiste 1:n levyisistä neliöistä, rittää tarkastella neliötä $[0,1]^2$.

(a) Kuvaus $r \in (0, \frac{1}{2}) \mapsto C_r$, missä C_r on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ keskinen r-säteinen ympyrä on bijektio ylinumeroituvalta joukolta.

(b) Samaistetaan kahdeksikko K rationaaliparin (p,q) kanssa

$$K \mapsto (p,q),$$

missä p kuuluu kahdeksikon toiseen silmukkaan ja q toiseeen. Koska $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tiheässä $\mathbb{R}^2$:ssa tällaisia pisteitä aina on olemassa. Piste ei ole yksikäsitteinen, mutta koska kahdeksikot eivät saa leikata toisiaan, on kuvaus $K \mapsto (p,q)$ injektio. Jos leikkaus olisi sallittu, voitaisiin valita yhteinen rationaalipiste pari, joka kuuluu kumpaankin kahdeksikkoon. (Tämä sallii sisäkkäiset, leikkaamattomat kahdeksikot) $\mathbb{Q}^2$ on numeroituva $\Rightarrow$ toisiaan leikkaamattomien kahdeksikkojen joukon mahtavuus on korkeintaan numeroituva.