HY Todennäköisyysteoria, syksy 2015, laskuharjoitukset 5 (25.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, olkoon Olkoon $\xi_n(\omega)$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono jolla

$$P(\xi_n = 2) = 1 - P(\xi_n = 0) = 1/2$$

ja

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) 3^{-n}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

   (a) Osoita että $\forall \omega \in \Omega$ $X(\omega)$ on hyvin määritelty (eli sarjaa suppenee), ja $X(\omega) \in C \subset [0,1]$, jossa C on Cantorin joukko.

   (b) Olkoon $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ kun $B \in \mathcal{B}([0,1])$.
   Osoita että $P_X(B) = P(B)$ jossa P on Cantorin jakauma kertymäfunktiolla $F(t)$ joka määriteltiin viimeisellä harjoituskerralla tehtävässä 5.

   (c) Laske odotusarvo $E(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon P ja Q todennäköisyyksiä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, jotka ovat ekvivalentteja, eli kun $A \in \mathcal{F}$ $Q(A) = 0 \iff P(A) = 0$, eli $P \ll Q$ ja $Q \ll P$. Silloin merkitään $P \sim Q$.

   Olkoon

$$Z(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega)$$

   uskottavuusosamäärä jolla pätee $E_Q(X) = E_P(ZX)$ kaikille satunnaismuuttujille $X \geq 0$.

   Osoita että

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = 1/Z(\omega)$$

   eli kaikille satunnaismuuttujille $X \geq 0$ $E_P(X) = E_Q(XZ^{-1})$

3. Gaussisesta jakaumasta.

(a) Osoita

$$2\pi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2$$

Vihje: Muuttujan vaihdolla $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta),\ r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$.

(b) On olemassa satunnaismuuttuja $G(\omega)$ jolla

$$P(G \leq x) = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

G:n jakauma kutsutaan standardiseksi Gaussiseksi jakaumaksi.
Vihje Valitse todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) Mikä on $G(\omega)$:n jakauman tiheysfunktio ?

(d) Olkoon $m \in R$ ja $\sigma > 0$, ja $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

i. Laske X:n jakauman kertymäfunktio $P(X \leq x)$.

ii. Laske X:n jakauman tiheysfunktio.

iii. laske Radon-Nikodymin derivaatta (uskottavuusosamäärä)

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x)$$

jossa $P_X(B) = P(X \in B)$ ja $P_G(B) = P(G \in B)$.
Vihje Uskottavuusosamäärä toteuttaa mitanvaihdon kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP_X}{dP_G}(x) P_G(dx)$$

kaikille Borel-mitallisille funktioille $h(x) \geq 0$.

iv. Laske myös uskottavuusosamäärä

$$\frac{dP_G}{dP_X}(x)$$

v. Laske odotusarvo

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \int_{\Omega} \exp(\lambda G(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x) P_G(dx)$$

vi. Laske myös odotusarvo $E_P(\exp(\lambda X))$ jossa $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

4. Olkoon $G_i(\omega)$ $i = 1, 2$, P-riippumattomia Gaussisia satunnaismuuttujat, jossa $G_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.

   Olkoon $W(\omega) = G_1(\omega) + G_2(\omega)$. Eli W:n jakauma on kahden Gaussisten satunnaismuuttujen konvoluutio.

   Osoita että $W(\omega)$ on Gaussinen ja laske sen tiheysfunktio.

   Vihje Laske jakaumien konvoluutio. Koska $G_i = \mu_i + G_i'$ jossa $G_i' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, voit olettaa että $\mu_i = 0$.

5. Olkoon $N_i(\omega)$, $i = 1, \dots, d$ P-riippumattomia Poisson(θ_i) satunnaismuuttujia jossa $\theta_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. Olkoon

$$X(\omega) = N_1(\omega) + \cdots + N_d(\omega)$$

   Osoita että X on Poisson jakautunut parametrilla $(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$.

6. Olkoon $X_i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ P-riippumattomia ja samoin jakatuneita binääri satunnaismuuttujia joilla

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p, \quad p \in (0, 1)$$

   Osoita että $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ on binomiaalisesti jakautunut, eli

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

7. Olkoon Q toinen todennäköisyysmitta jonka suhteen $X_i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ Q-riippumattomia ja samoin jakatuneita binääri satunnaismuuttujia joilla

$$Q(X_i = 1) = 1 - Q(X_i = 0) = q, \quad q \in (0, 1)$$

   Osoita että $P \sim Q$ (eli $P \ll Q$ ja $Q \ll P$) σ-algebrassa $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

   Laske uskottavuusosamäärä $\mathcal{F}_n$ σ-algebrassa joka on muotoa

$$Z(\omega) := \frac{dP}{dQ}(\omega) = z(S_n)$$

   jossa $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Borel mitallinen funktio.

8. Olkon satunnaismuuttuja $X(\omega) \geq 0$, ja olkoon $q > 0$.

   Osoita:

$$E_P\big(X^q\big) = q \int_0^\infty t^{q-1} P(X > t) dt = E_P\big(X^q\big) = q \int_0^\infty t^{q-1} P(X \geq t) dt$$