HY Todennäköisyysteoria, syksy 2015, laskuharjoitukset 4 (18.2.2015)

1. Olkoon $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei-vähenevä funktio, eli $G(s) \le G(t)$ kun $s \le t$. Osoita että G on Borel mitallinen.

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X_n(\omega)$ $n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujen jono jolla

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_P\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

jollekin $p > 0$.

Osoita: $\forall K \in \mathbb{N}$

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\big(|X_n| > 1/K\big) \le K^p \sum_{n \to \infty} E_p\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

Vihje: muista Chebychevin epäyhtälö.

(b) Osoita:

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = 0 \qquad P\text{-melkein varmasti .}$$

Vihje muista Borel Cantelli lemma (kumpi ?).

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon satunnaismuuttujat $U_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$ P-riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0, 1]$, kertymäfunktiolla

$$F_1(t) = P(U_1 \le t) = t, t \in [0, 1]$$

Olkoon

$$M_n(\omega) = \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

jonon juokseva maksimi.

(a) Laske M_n jakauman kertymäfunktio

$$F_n(t) = P(M_n \le t), \quad t \in [0, 1]$$

(b) Osoita M_n jakauma on absoluttisesti jatkuva Lebesgue mitan suhteen ja laske sen tiheysfunktio.

(c) Osoita

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\omega) = 1 \qquad P\text{-melkein varmasti.}$$

4. Olkoon P ja P' todennäköisyysmittoja todennäköisyys avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   (a) Olkoon $\alpha \in [0,1]$. Osoita että todennäköisyyskien konveksi kombinaatio

   $$Q_\alpha(A) = \alpha P(A) + (1-\alpha)P'(A)$$

   on todennäköisyys, ja kun $0 < \alpha < 1$,

   $$Q_\alpha \gg P \text{ ja } Q_\alpha \gg P'$$

   eli P ja P' ovat absoluttisesti jatkuvia Q_α:n suhteen.

   (b) Olkoon $\alpha \in (0,1)$ ja

   $$\zeta(\omega) = \frac{dP}{dQ_\alpha}(\omega), \quad \zeta'(\omega) = \frac{dP'}{dQ_\alpha}(\omega),$$

   uskottavuus-osamäärät (Radon-Nikodym derivaatat), ja olkoon

   $$\mu(A) = \int_\Omega \big(\zeta(\omega) \vee \zeta'(\omega)\big)\mathbf{1}_A(\omega) Q_\alpha(d\omega)$$

   jossa $x \vee y = \max\{x,y\}$.

   (c) Osoita että μ on pienin mitta jolla

   $$\mu(A) \geq P(A) \vee P'(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

   (d) Osoita että $\mu(\Omega) = 1 \iff P = P'$.

5. Olkoon $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, eli $F(t)$ on ei-vähenevä oikealta jatkuva, $F(-\infty) = 0$ ja $F(+\infty) = 1$. Merkitään $\Delta F(t) = F(t+) - F(t-) = F(t) - F(t-) \geq 0$.

   (a) Osoita että epäjatkuvuuden pisteiden joukko

   $$\big\{t : \Delta F(t) > 0\big\}$$

   on korkeintaan numeroituva

(b) Osoita:

$$F(t) = F^{(c)}(t) + \sum_{r \le t} \Delta F(r)$$

jossa $F^{(c)}$ on ei-vähenevä ja jatkuva.

(c) Osoita että

$$F^{(c)}(t) = F^{(a)}(t) + F^{(s)}(t)$$

jossa

$$F^{(a)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f^{(a)}(r) dr$$

jossa $f^{(a)} \ge 0$ on Borel mitallinen, ja

$$F^{(s)}(t) = \mu^{(s)}\big((-\infty, t]\big)$$

jossa $\mu^{(s)}$ on singulaarinen Lebesgue mitan suhteen.

6. (Cantorin joukko ja Cantorin jakauma) Olkoon $\Omega = C_0 = [0,1]$, varustettuna Lebegue mitalla P_0 jolla $F_0(t) = P_0([0,t]) = t$ kun $t \in [0,1]$.

Olkoon

$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$,

$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

...

$C_n = C_{n-1}1/3 + (2/3 + C_{n-1}1/3)$, $n \in \mathbb{N}$.

jossa kun $A \subseteq [0,1]$ merkitään

$$(a + bA) = \big\{y = (a + bx) : x \in A\big\}$$

(a) Osoita: tapahtumien jono C_n on ei-kasvava eli $C_n \supseteq C_{n+1} \downarrow C := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

C kutsutaan Cantorin joukoksi.

(b) Osoita että Cantorin joukko C on kompakti ja Borel mitallinen.

(c) Jokaisella $x \in [0,1]$ on esitys $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k$ jossa $\xi_k \in \{\ 0, 1, 2\}$.

Osoita:

$$C_n = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k \ : \ \xi_k \in \{0,2\}\ \forall 1 \le k \le n \right\}$$

$$C = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\xi_k \ : \ \xi_k \in \{0,2\}\ \forall k \ge 1 \right\} \neq \emptyset,$$

osoita myös että on olemassa bijektio $C \longrightarrow [0,1]$ josta seuraa että C ei ole numeroituva.

(d) Osoita: $P_0(C_n) = (2/3)^n$, jossa P_0 on Lebesgue mitta.

(e) Määritellän funktioiden jono $F_n : [0,1] \to [0,1]$, jolla kun $t \in [0,1]$,

$$F_0(t) = t,$$
$$\dots$$
$$F_n(t) = (3/2)^n \int_0^t \mathbf{1}_{C_n}(s) ds$$

Osoita $F_n(t)$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio, $F_n(t)$ on jatkuva, ja vastaava todennäköisyysjakauma $P_n(t)$ on absolut-tisesti jatkuva Lebesgue mitan P_0:n suhteen.

(f) Osoita $\forall t \in [0,1]$, $\exists$

$$F(t) := \lim_{n\to\infty} F_n(t)$$

(g) Osoita että $P_0(C) = 0$ jossa P_0 on Lebesgue mitta.

(h) Osoita että funktio $F(t)$ on jatkuva.

Vihje muista Ascoli Arzela lause.

(i) Osoita että $F(t)$ on todennäköisyysjakauman kertymäfunktio. Vastaava todennäköisyys P kutsutaan Cantorin mitaksi.

(j) Osoita että $P(C) = 1 = P([0,1])$ ja Cantorin mitta P on singulaarinen Lebesgue mitan P_0 suhteen.

(k) Osoita että Cantorin mitalla P pätee

$$P(\{t\}) = \Delta F(t) = 0 \quad \forall t,$$

eli Cantorin mitalla ei ole pistemassoja.