HY Todennäköisyysteoria, kevät 2015, laskuharjoitukset 1 (21.1.2015)

1. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ äärellinen joukko,

   $W = (w_1, \dots, w_n) \subseteq \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, jossa $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, ja vähintään yhdelle koordinaatille i, $w_i > 0$ (aidosti).

   Määritellään $\forall B \subseteq \Omega$

   $$P_W(B) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

   - Osoita että P_W on additiivinen ja $P_W(\Omega) = 1$.
   - Karakterisoi P_W-varmat tapahtumat.
   - Olkoon $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

     X tulkitaan sopimukseksi joka maksaa takaisin suuretta $X(\omega_k) = x_k$ kun ω_k tapahtuu.

     Laske sopimuksen X:n hinta (odotusarvo) $E_{P_w}(X)$ hinnoitelutodennäköisyydellä P_w.

2. (jatko) Olkoon $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Osoita hinnoittelutodennäköisyyden vaihto kaava

   $$E_{P_{WZ}}(X) = \frac{E_{P_W}(ZX)}{E_{P_W}(Z)}$$

   Tässä $(WZ) \in \mathbb{R}^n$ on pistettäin-tulo, eli $(WZ)_i = W_i Z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

3. (jatko) Olkoon nyt $C \subseteq \Omega$, jolla $P_W(C) > 0$. Maritellään $\forall B \subseteq \Omega$

   $$P_W(B|C) := P_{W\mathbf{1}_C}(B)$$

   jossa $\mathbf{1}_C$ on C joukon indikaattori. Osoita että

   $$P_W(B|C) = \frac{P_W(B \cap C)}{P_W(C)}$$

   ja kuvaus

   $$B \mapsto P_W(B|C)$$

   on additiivinen todennäköisyys. $P_W(B|C)$ on tapahtuman B:n ehdollinen todennäköisyyys ehdolla C tapahtumaa, P_W todennäköisyyden suhteen. Se on hyvin määritelty pelkästään kun $P_W(C) > 0$.

4. (jatko) Oloon $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio, laske sen hinta (odotusarvo) $E_{P_W}(X|C)$ ehdollisen todennäköisyyden $P_W(\cdot|C)$:n suhteen.

5. Olkoon $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r \text{ rationaalinen} : 0 \le r \le 1\}$.

   Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma joukoista joilla on esitys äärellisenä yhdistenä joukoista $(a,b] \cap \mathbb{Q}$, $[a,b] \cap \mathbb{Q}$,$(a,b) \cap \mathbb{Q}$, tai $[a,b) \cap \mathbb{Q}$, jossa $0 \le a \le b \le 1$.

   Määritellään $\forall 0 \le a \le b \le 1$

   $$P((a,b] \cap \mathbb{Q}) = P([a,b] \cap \mathbb{Q}) = P((a,b) \cap \mathbb{Q}) = P([a,b) \cap \mathbb{Q}) = b - a,$$

   - Osoita että $\mathcal{A}$ on algebra, eli $\Omega \in \mathcal{A}$, jos $A \in \mathcal{A}$ myos $A^c := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$ ja jos $A, B \in \mathcal{A}$ myös $A \cup B \in \mathcal{A}$.
   - Laajenna P joukkofunktio äärellisesti addiitiiviseksi mitaksi koko algebralle $\mathcal{A}$.
   - Osoita että kyseinen additiivinen mitta P ei ole σ-additiivinen.

   Vihje Tässä tapauksessa $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ on numeroituva !.

6. Olkoon Ω mielivaltainen joukko, 2^Ω merkitsee sen potenssijoukko, eli Ω:n alijoukkojen kokoelma. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

   $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \in A \text{ vai } \omega \in B \text{ mutta ei molemmissa }\}$$

   Näytä että potenssijoukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

   - Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
   - Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
   - osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,
   - osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

   Vihje : indikaattorille pätee

   $$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$$
   $$\mathbf{1}_{(A \Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = 1_A \mathbf{1}_{B^c} + \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{A^c}$$

7. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus varustettuna σ-algebralla $\mathcal{F}$ ja todennäköisyydellä P.

   Osoita: joukko funktio $\rho_i : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

   $$\rho_1(A,B) = P(A \triangle B), \quad \text{ja} \quad \rho_2(A,B) := \frac{P(A \triangle B)}{P(A \cup B)} = P(A \triangle B | A \cup B)$$

   (silloin kun $P(A \cup B) = 0$ sovitaan että $0/0 = 0$), ovat etäisyyksiä, eli ovat positiivisia, symmetrisiä ja toteuttavat kolmion epäyhtälöä

   $$\rho_i(A,C) \leq \rho_i(A,B) + \rho_i(B,C), \quad i = 1,2$$

   Vihje Yleisesti, jos $\rho_1 : E \times E \to \mathbb{R}^+$ on etäisyys, ja $z \in E$, seuraa myös

   $$\rho_2(x,y) := \frac{2\rho_1(x,y)}{\rho_1(x,z) + \rho_1(y,z) + \rho_1(x,y)} \qquad \text{(Steinhaus muunnos)}$$

   on myös etäisyys. Meidän tapauksessa voidaan valita $z = \emptyset$ (tyhjä joukko).

8. Olkoon $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ saman joukon Ω:n σ-algebrien kokoelma jossa $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi-joukko.

   Osoita että leikkaus

   $$\mathcal{G} := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_\alpha$$

   on σ-algebra.

9. Todista väitteet:

   Mielivaltainen π(vastaavasti d)-luokkien, leikkaus on π(vastaavasti d)-luokka. Eli

   $$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{D}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka, ja

   $$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka. Myös

   $$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä σ-algebra.

10. Olkoon $E \subseteq \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$ kokoelma osajoukoista

$$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$ and $a_i, b_i \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$, jossa

$$-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq +\infty,$$

Osoita että $\mathcal{E}$ on algebra, mutta ei ole σ-algebra.

11. Olkoon $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ saman tapahtumien joukon Ω:n kasvava algebrojen jono, jossa $\mathcal{A}_{n+1} \supseteq \mathcal{A}_n$.

Osoita että yhdiste

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

on algebra.

Jos korvataan "algebrat" "σ-algebroilla" tämä väite ei välttämättä päde, esitä vastaesimerkki.

12. Olkoon $A_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, tapahtumien jono.

- Osoita:

$$\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \qquad \text{jossa } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

- Osoita: $\liminf_n A_n := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n = \big(\limsup_n A_n^c\big)^c$ jossa $A^c = \Omega \setminus A$ on tapahtuman komplementti.

- Osoita

$$\limsup_n (A_n \cup B_n) = (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n),$$
$$\liminf_n (A_n \cup B_n) = (\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n)$$

- Osoita

$$(\limsup_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) \subseteq \limsup_n (A_n \cup B_n) \subseteq (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$$

Osoita jos $A_n \uparrow A$,eli $A_n \subseteq A_{n+1}$ ja $\bigcup_n A_n = A$, vai $A_n \downarrow A$,eli $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_n A_n = A$, molemmissa tapauksessa seuraa

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

13. Olkoon $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ joka koostuu binäärijonoista $\omega = (\omega_n : n \in \mathbb{N}) \in \Omega$.

Määritellään sylinteri-algebrat $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$, jossa $A \in \mathcal{F}_n$ jos ja vain jos on olemassa $A_n \subseteq \{0,1\}^n$ jolla

$A = \{\omega : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A_n\}$.

Olkoon

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \sigma\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\Bigr),$$

joka on pienin σ-algebra joka sisältää kaikki sylinteri-σ-algebrat.

Olkoon

$$\begin{aligned} L \quad &:= \quad \bigl\{\omega : \exists \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\bigr\} = \\ &= \quad \bigl\{\omega : \lim\sup_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \lim\inf_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\bigr\} \end{aligned}$$

Osoita $L \in \mathcal{F}_\infty$, mutta $L \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Vihje: Osoita ensin että kaikille $q_1 < q_2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$,

$$\bigl\{\omega : \limsup_{n} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\bigr\} \in \mathcal{F}_\infty \text{ ja}$$

$$\bigl\{\omega : \liminf_{n} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\bigr\} \in \mathcal{F}_\infty$$