HY Todennäköisyysteoria I, kevät 2015, laskuharjoitukset 3 (11.2.2015)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $U(\omega)$ satunnaismuuttuja joka on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$, eli sen jakaunan kertymäfunktio on

$$F_U(t) := P\big(\{\omega : U(\omega) \le t\}\big) = \begin{cases} 0 & , \ t \le 0 \\ t & , \ 0 < t \le 1 \\ 1 & , \ t > 1 \end{cases}$$

   Laske odotusarvot

$$E_P\big(U^r\big), \text{ ja } E_P\big(\exp(rU)\big), \quad r \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Todista Chebychevin epäyhtälö: jos $X(\omega) \ge 0$ P-melkein varmasti,

$$P(X > t) \le \frac{E_P\big(X\big)}{t}$$

   Vihje

$$0 \le t\, \mathbf{1}(X(\omega) > t) \le X(\omega)$$

   (b) Osoita myös Chentsovin epäyhtälö

$$P(X > t) \le \inf_{\lambda > 0} \Big\{ \exp(-\lambda t) E_P\big(\exp(\lambda X)\big) \Big\}$$

3. Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega)$ Poisson(θ) jakautunut, jossa $\theta > 0$ on parametri, eli

$$P_\theta\big(X = n\big) = \exp(-\theta) \frac{\theta^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

   Osoita että P on todennäköisyys.

   (b) Laske $E_\theta(\exp(\lambda X))$, $\forall \lambda > 0$.

   (c) Arvioi yläpuolelta $P_\theta\big(X > t\big)$ Chentsovin epäyhtälöllä.

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $S_n(\omega)$ binomiaalisesti-jakautunut parametreilla $n \in \mathbb{N}$ ja $p \in (0,1)$, eli $X(\omega) \in \{0, 1, \dots, n\}$ P-melkein varmasti jossa

$$P_{S_n}(\{k\}) = P\Bigg(\{\omega : S(\omega) = k\} \Bigg) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 1, 0, \dots, n$$

Newtonin bimomi kaavasta

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

jossa $q = (1-p)$, seuraa että $P_X(\{0, 1 \dots, n\}) = 1$

(a) Laske momentti-generoiva funktio

$$g_{S_n}(\theta) := E_P\big(\exp(\theta S_n)\big), \quad \theta > 0$$

(b) Olkoon $p < a < 1$. Osoita suurten poikkeamien yläraja:

$$P\big(S_n > an\big) \le \left(\frac{p}{a}\right)^{na} \left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{n(1-a)} = \exp\left\{-n\left(a \log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a)\log\left(\frac{1-a}{1-p}\right)\right)\right\}$$
$$= \exp\big\{-nK(P_a|P_p)\big\}$$

jossa (tiedoksi vaan)

$$K(P_a|P_p) := \sum_{\omega=0,1} P_a(\{\omega\}) \log\left(\frac{P_a(\{\omega\})}{P_p(\{\omega\})}\right) = a\log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a)\log\left(\frac{1-a}{1-p}\right)\right)$$

on binääri todennäköisyyden P_p:n suhteellinen entropia binääri todennäkösyyden P_a:n suhteen, jossa $P_p(\{1\}) = 1 - P_p(\{0\}) = p$, $p \in (0,1)$.

Vihje: kun $\theta > 0$

$$P(S_n > an) = P\big(\exp(\theta S_n) > \exp(\theta an)\big)$$

Käytä Chentsovin epäyhtälö ja minimoi yläraja derivoimalla θ:n suhteen.

5. Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, siis $E_P(|X|) < \infty$. Osoita että

$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty .$$

Vihje

$$0 \le |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega) \le b|) \uparrow |X(\omega)|$$

kun $n \uparrow \infty$.

6. Tehtävä numeroituvuudesta:

(a) Osoita: tauluun$=[0,1]^2$ mahtuu ylinumeroituva määrä erillisiä nolla-merkin='O' eli ympyrän muotoisia käyriä, (siis ympyrä-käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).

(b) Osoita että taulussa $= [0,1]^2$ tai vaikka $= \mathbb{R}^2$ avaruudessa mahtuu korkeintaan numeroituva määrää erillisiä '8' eli '∞'-merkkin muotoisia käyriä (siis '8'- muotoisia käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).