HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus 3 Ratkaisut (4.04.2014)

1. **Amerikkalaiset optiot epätäydellisessä mallissa .**

   Todennäköisavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, oletamme markkinamallia jossa on kaksi rahoitusinstrumenttia $(B_t(\omega), S_t(\omega) : t = 0, 1, \dots, T)$, ei negatiivisia ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,\dots,T}$-sopivia (adapted).

   Voidaan olettaa että σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ on triviaali, siis B_0 ja S_0 deterministisia.

   Olkoon $(G_t(\omega))_{t=1,2,\dots,T}$ amerikkalainen optio, siis oikeus lunastaa kerran $G_t(\omega)$ valitulla hetkellä $t \in \{1, \dots, T\}$.

   Olkoon $\mathcal{Q}$ eqvivalentti martingaali mittojen joukko numeräärillä $S^{(0)}$. Oletamme että (B, S) markinamalli ei ole täydellinen, siis $\mathcal{Q}$ sisältää useita riskineutraalimittoja.

   Merkitsemme diskontatut prosessit

   $$S_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t(\omega), \quad G_t(\omega) = G_t(\omega)/B_t(\omega)$$

   (a) Osoita että hetkellä $t = 0$ amerikkalaisen option $(G_t(\omega))_{t=1,\dots,T}$ arbitraasivapaaiden hintojen joukko $\mathcal{C}$ on yksikäsitteinen jos ja vain jos $U_0^+ = U_0^-$, ja muuten $\mathcal{C}$ on avoin väli (U_0^-, U_0^+) , jossa määritellään rekursivisesti

   $$\begin{aligned}
   &U_T^+(\omega) = U_T^-(\omega) = G_T(\omega),\\
   &U_t^+(\omega) = \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^+/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\}, \qquad t = 1, \dots, T-1\\
   &U_0^+(\omega) = B_0 \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega))\\
   &U_t^-(\omega) = \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^-/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\} \quad t = 1, \dots, T-1\\
   &U_0^-(\omega) = B_0 \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega)) \quad t = 0
   \end{aligned}$$

   Vihje: katso ensi mitä tapahtuu kun $T = 2$.

   R. Hetkellä $t = T - 1$ option haltija saa valita option sisäisen arvon $F_{T-1}(\omega)$ ja eurooppalaisen option $G_T(\omega)$:n välissä.

   Hetkellä $t = (T - 1)$ eurooppalaisen osto option $G_T(\omega)$ arbitraasivaapaiden hintojen joukko on

   $$\mathcal{C}_{T-1} = \left\{ E_Q(G_T/B_T|\mathcal{F}_{t-1})B_{T-1} : Q \sim P \text{ on martingaali mitta} \right\}$$

Tästä seuraa että hetkellä $t = T - 1$ amerikkalaisen option arbitraasivapaiden hintojen joukko on

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{T-1} = \left\{ G_{T-1}(\omega) \vee \big(B_{T-1}(\omega) E_Q(G_T/B_T|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\big) : Q \sim P \text{ on martingaali mitta} \right\}$$

Hetkellä $t = (T-1)$ Jokaiselle ω:lle amerikkalaisen option arbitraasivapaiden hintojan joukko on avoin väli $(U^-_{T-1}(\omega), U^+_{T-1}(\omega))$ tai yksiö $U_{T-1}(\omega) = U^{\pm}_{T-1}(\omega)$, (tämä tapahtuu jos ja vain jos $\mathcal{C}_{T-1}$ on yksiö, tai tai

$$G_{T-1}(\omega) \geq B_{T-1}(\omega) E_Q(G_T/B_T|\mathcal{F}_{T-1})(\omega)$$

kaikille riskineutraali mitoille $Q \sim P$.

Induktiivisesti, olkoon $U^{\pm}_{t+1}(\omega) \in \mathcal{F}_{t+1}$ ameriikkalaisen option arbitraasivapaat ala- ja ylä- hinnat hetkellä $(t+1)$, jotka täsmäävät silloin kun hinta on yksikäsitteinen, siis $U^+_{t+1}(\omega) = U^-_{t+1}(\omega) = U_{t+1}(\omega)$.
Siis hetkellä $(t+1)$ amerikkalainesesta optiosta voidaan maksaa vähintään $U^+_{t+1}(\omega)$ mutta ei enempää kuin $U^-_{t+1}(\omega)$ ettei kenellekään tulisi arbitraasimahdollisuuksia.

Rekursiivisesti, jos hetkellä t option hinta C_t olisi pienempi kuin

$$G_t(\omega) \vee \left(B_t(\omega) \inf_{Q \sim P \text{ riskineutraali}} E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right)$$

option ostaja voisi tehdä arbitraasia, koska jos $C_t < G_t$ option ostaja saa heti riskitonta voittoa ostamalla amerikkalaisen option ja lunastamalla optionsa saman tien, muuten $C_t < B_t(\omega) E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)$ kaikille riski neutraalille mitoille $Q \in \mathcal{Q}$.
Koska

$$B_t(\omega) \inf_{Q \sim P \text{ riskineutraali}} E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)$$

on myös suurin alisuojausstrategian hinta optiolle U^-_{t+1}, on olemassa alisuojaus portfolio $\pi = (\beta_{t+1}, \gamma_{t+1}) \in \mathcal{F}_t$ jolla on arvo hetkellä t

$$V^\pi_t = \beta_{t+1} B_t + \gamma_{t+1} S_t = C_t$$

ja jolla

$$V^{\pi}_{t+1}(\omega) \le U^{-}_{t+1}(\omega)$$

P ja Q melkein kaikille ω:lle

Arbitraasi strategia on seuraava: hetkellä t otamme velaksi salkun π jolla on arvoa $V^{\pi} = C_t$, saamme siitä rahasumman C_t käteen jolla ostamme amerikkalaisen option. Siis kokonaisuudessa hetkellä t pääoman arvo on 0.

Hetkellä $t+1$ me myymme amerikkalaisen option pois jolla on arvoa vähintään U^{-}_{t+1}, ja maksamme takaisen velkamme V^{π}_{t+1}. Meille jää käteen ei negatiivinen summa joka on joskus myös positiivinen.

Jos hetkellä t option hinta C_t on suurempi kuin

$$G_t(\omega) \vee \left(B_t(\omega) \sup_{Q\sim P \text{ riskineutraali}} E_Q(U^{+}_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right)$$

silloin option myyjä voi tehdä arbitraasia, koska jos option haltija lunastaa heti optionsa, myyjä voittaa heti $(C_t - G_t) \ge 0$, jos option haltija ei lunasta heti optionsa, hetkellä $(t+1)$ option hinta tule olemaan korkeintaan $U^{+}_{t+1}(\omega)$, ja koska

$$B_t(\omega) \sup_{Q\sim P \text{ riskineutraali}} E_Q(U^{+}_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)$$

on pienin ylisuojavan strategian arvo, sillä summalla pystyy suojamaan option $U^{+}_{t+1}(\omega)$ ja tämä on hetkellä $(t+1)$ yläraja amerikkalaisen option hinnalle. Siis option myyjä ei häviää koskaan ja joskus saa postiivista voittoa.

(b) Osoita että

$$U^{+}_0 = B_0 \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau}), \qquad U^{-}_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau})$$

jossa $\mathcal{T}_0$ on pysähdyshetkien joukko, $\widetilde{G}_t := G_t/B_t$ on diskontattu amerikkalaisen option sisäinen arvo.

R Induktivisesti, osoitamme että

$$\widetilde{U}^{+}_t := U^{+}_t/B_t = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau}|\mathcal{F}_t), \qquad \widetilde{U}^{-}_t := U^{-}_t/B_t = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau}|\mathcal{F}_t)$$

jossa $\mathcal{T}_t = \{\tau \text{ pysähdyshetki }, T \ge \tau \ge t\}$.

Kun $t = (T-1)$, määrittelemme pysähdyshetki $\tau^*(T-1,\omega) \in \mathcal{T}_{T-1}$ seuraavasti:
$\tau^*(T-1,\omega) = (T-1)$ kun $G_{T-1} \geq \sup_Q E_Q(G_T|\mathcal{F}_{T-1})$,
muuten $\tau^*(T-1,\omega) = T$.
Siis määritelmästä seuraa että $\tau^*(T-1,\omega)$ on optimaalinen jolla

$$\widetilde{U}^+_{T-1} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{T-1}} \sup_Q E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{T-1}) = \sup_Q E_Q(\widetilde{G}_{\tau^*(T-1)}|\mathcal{F}_{T-1})$$

Vastavaasti määrittelemme $\tau_*(T-1,\omega) \in \mathcal{T}_{T-1}$,
jossa $\tau_*(T-1,\omega) := (T-1)$ kun $G_{T-1} \geq \inf_Q E_Q(G_T|\mathcal{F}_{T-1})$,
muuten $\tau_*(T-1,\omega) = T$.
Seuraa että τ_* on optimaalinen

$$\widetilde{U}^-_{T-1} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{T-1}} \inf_Q E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{T-1}) = \inf_Q E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(T-1)}|\mathcal{F}_{T-1}) \stackrel{?}{=} \inf_Q \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{T-1}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{T-1})$$

Osoitamme että myös viimeinen yhtälö on voimassa.
Kiinitämme ensi $Q \sim P$, ja määrittelemme $\tau_*(Q) := (T-1)$ kun $G_{T-1} \geq E_Q(G_T|\mathcal{F}_{T-1})$,
muuten $\tau_*(\omega) = T$. Seuraa että $\tau_*(Q)$ on optimaalinen:

$$E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(Q)}|\mathcal{F}_{T-1}) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{T-1}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{T-1}$$

Nyt huomaamme että

$$\inf_Q \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{T-1}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{T-1} = \inf_Q E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(Q)}|\mathcal{F}_{T-1}) = \inf_Q E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(T-1)}|\mathcal{F}_{T-1})$$

Induktiivisesti oletetaan että $T > t > 0$, ja olemme maääritelleet $\tau_*(t+1,\omega), \tau^*(t+1,\omega) \in \mathcal{T}_{t+1}$ jotka ovat optimaalisia hetkellä $(t+1)$, siis

$$\widetilde{U}^+_{t+1} := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t+1}} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{t+1}) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau^*(t+1)}|\mathcal{F}_{t+1})$$
$$\widetilde{U}^-_{t+1} := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t+1}} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_{t+1}) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(t+1)}|\mathcal{F}_{t+1})$$

Määrittelemme pysähdyshetki $\tau^*(t,\omega) \in \mathcal{T}_t$ seuraavasti:
$\tau^*(t,\omega) = t$ kun $G_t \geq \sup_Q E_Q(\widetilde{U}^+_{t+1}|\mathcal{F}_t)$

muuten $\tau^*(t,\omega) = \tau^*(t+1,\omega)$.
Määrittelemme myös pysähdyshetki $\tau_*(t,\omega) \in \mathcal{T}_t$ seuraavasti:
$\tau_* * (t,\omega) = t$ kun $G_t \geq \inf_Q E_Q(\widetilde{U}^-_{t+1}|\mathcal{F}_t)$
muuten $\tau_*(t,\omega) = \tau_*(t+1,\omega)$.
Induktion hypoteesin avulla seuraa että

$$\widetilde{U}^+_t := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t}\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_t) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau^*(t)}|\mathcal{F}_t)$$
$$\widetilde{U}^-_t := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t}\inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_t) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_{\tau_*(t)}|\mathcal{F}_t)$$

(c) Osoita että

$$\tau_{\min}(\omega) = \inf\left\{1 \leq t \leq T: \ G_t \geq \ B_t(\omega) \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\right\}$$

ja

$$\tau_{\max}(\omega) = \inf\left\{1 \leq t \leq T: \ G_t > \ B_t(\omega) \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U^+_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\right\}$$

ovat pysähdyshetkiä jolla $\tau_{\min} \leq \tau_{\max}$ P-melkein varmasti.
$\tau_{\min}$ ja $\tau_{\max}$ ovat pysähdyshetkiä, koska esimerkiksi,

$$\{\tau_{\min}(\omega) \leq t\} = \bigcup_{1\leq s\leq t}\left\{G_s(\omega) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{U}^-_{s+1}|\mathcal{F}_s)(\omega)\right\} \in \mathcal{F}_t$$

$\tau_{\min} \leq \tau_{\max}$ seuraa suoraan siitä että $U^+_{t+1} \geq U^-_{t+1}$.

(d) Osoita että option ostajan ei kannata lunastaa optionsa ennen hetkeä $\tau_{\min}(\omega)$ eikä hetken $\tau_{\max}(\omega)$ jälkeen.
R Option ostajan ei kannata lunastaa optionsa hetkellä t kun $t < \tau_{\min}(\omega)$ koska silloin

$$\widetilde{G}_t(\omega) < \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{U}^-_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t+1}}\inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_t)$$

oikealla puolella on amerikkalaisen option alahinta.
Vastaavasti hetkellä t option ostajan ei kannata enää odottaa kun $t = \tau_{max}(\omega)$, ensimmäinen hetki jolla

$$\widetilde{G}_t(\omega) > \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{U}^+_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t+1}}\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau|\mathcal{F}_t)$$

jossa oikealla puolella on amerikkalaisen option ylähinta.
Kirjallisuus: Tätä problematiikkaa käsitellään muun muassa luvussa 6.3 Föllmerin ja Shiedin *Stochastic Finance* kirjassa.

2. Olkoon Black ja Scholes jaktuvaaikaisessa markkinamallissa instrumenteilla $(B_t, S_t : r \in \mathbb{R}^+)$, $B_t = \exp(rt)$ jossa $r > 0$ on deterministinen korko, ja

$$S_t = S_0 \exp\bigl(\sigma W_T + \bigl(r - \frac{1}{2}\sigma^2\bigr)T\bigr)$$

jossa $(W_t : t \in [0, T])$ on Brownin liike todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Differentiaalimuodossa

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + rdt), \text{ eli } S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u + \int_0^t S_u r du$$
$$dB_t = B_t r dt, \; B_t = B_0 + \int_0^t B_u r du$$

jossa $\int\limits_0^t S_u \sigma dW_u$ on Iton integraali.

(a) Osoita että P on riskineutraali numeräärin B_t:n suhteen, eli $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = \{\ \mathcal{F}_t^W\}$, jossa $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \le s \le t)$.

(b) Laske hinta europpalaiselle osto optiolle $X(\omega) = (S_T - K)^+$ binomipuumalli approximatiolla, jossa kun $k = 1, \dot{,} N$,

$$B_{kT/N} = B_{(k-1)T/N}\bigl(1 + rT/N\bigr)$$
$$S_{kT/N} = S_{(k-1)T/N}\bigl(1 + rT/N + \xi_k \sigma \sqrt{T/N}\bigr)$$

ja satunnaismuuttujat ξ_k ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla

$$P(\xi_k = 1) = 1 - P(\xi_k = -1) = 1/2\ .$$

R Binomi mallin approksimaatiosta saatiin kaava option hinnalle

$$c(X) = E_Q(f(S_T)) \exp(-rT)$$

jossa $f(S_T) = (S_T - K)^+$

$dS_t = S_t(rdt + \sigma W_t)$, which means $S_t = S_0 \exp\bigl(\sigma W_T + \bigl(r - \frac{1}{2}\sigma^2\bigr)T\bigr)$

ja (W_t) on Brownin liike mitan Q:n suhteen joka on raja riski neutraalimitoista Q_n. Seuraa että

$$
\begin{aligned}
&E_Q((S_T-K)^+)\exp(-rT) = \\
&\exp(-rT)\int_{-\infty}^{\infty}\big\{S_0\exp\big(y\sigma\sqrt{T}+\big(r-\frac{1}{2}\sigma^2\big)T\big)-K\big\}^+\exp(-\frac{y^2}{2})\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\exp(-rT)\int\limits_{d^-}^{\infty}\big\{S_0\exp\big(y\sigma\sqrt{T}+\big(r-\frac{1}{2}\sigma^2\big)T\big)-K\big\}\exp(-\frac{y^2}{2})\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

jossa

$$
d^- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log(K/S_0)+\frac{T}{2}\sigma^2-rT\big),
$$

$$
\begin{aligned}
&= S_0\exp(-\sigma^2T/2)\int_{d^-}^{\infty}\exp\big(-\frac{y^2}{2}+y\sigma\sqrt{T}\big)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}-K\exp(-rT)(1-\Phi(d^-)) \\
&= S_0\int_{d^-}^{\infty}\exp\big(-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\big)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}-K\exp(-rT)\Phi(-d^-) \\
&= S_0(1-\Phi(d^--\sigma\sqrt{T}))-K\exp(-rT)\Phi(-d^-) \\
&= S_0\Phi(\sigma\sqrt{T}-d^-)-K\exp(-rT)\Phi(-d^-) \\
&= S_0\Phi\bigg(\sigma\sqrt{T}-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log(K/S_0)+\frac{T}{2}\sigma^2-rT\big)\bigg)+ \\
&-K\exp(-rT)\Phi\bigg(-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log(K/S_0)+\frac{T}{2}\sigma^2-rT\big)\bigg) \\
&= S_0\Phi\bigg(\frac{\log(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}+\frac{r}{\sigma}\sqrt{T}\bigg) \\
&-K\exp(-rT)\Phi\bigg(\frac{\log(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}+r\sigma\sqrt{T}\bigg)
\end{aligned}
$$

ja $\Phi(x) = P(W_1 \le x) = 1-\Phi(-x) = 1-P(W_1 > -x)$ on standardi-gaussisen satunnaismuuttujan W_1 kertymäfunktio. Koska jakauma on symmetrinen 0:n ympärille, seuraa että $\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$.