HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitukset 5 (2.05.2012)

Tehtävissä $\big(W_t : t \in [0,T]\big)$ Brownin liike, eli $W_0(\omega)=0$, lisäykset ovat P-riippumattomia ja stationaatisia joilla kun $0 \le s \le t$ $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, ja P-melkein varmasti polut $t \to W_t(\omega)$ ovat jatkuvia, joilla on olemassa kvadrattinen variaatio $[W,W]_t = t$.

1. Olkoon x_t, y_t jatkuvat funktiot joilla on olemassa kvadraattiset kovariaatiot, $[x,x]_t$ $[y,y]_t$ ja ristivariaatio $[x,y]_t$.

   Käytä Iton kaavaa funktiolle $f(x,y)=xy$ osoittamaan osittaisintegroinnin kaavaa

$$x_t y_t = x_0 y_0 + \int_0^t x_s dy_s + \int_0^t y_s dx_s + [x,y]_t$$

   Olkoon $t \mapsto x_t > 0$ jatkuva funktio jolla on kvadrattinen variaatio $[x,x]_t$.

   Laske integraali esitys funktiolle $y_t = f(x_t) = \frac{1}{x_t}$. Laske myös kvadrattinen variaatio $[y,y]_t$ ja ristivariaatio $[x,y]_t$. Vihje: käytä Iton kaavaa.

   R. Iton kaavasta

$$\begin{aligned}
&d(X_tY_t) = df(X_t,Y_t) = \frac{\partial}{\partial y} f(X_t,Y_t)dY_t + \frac{\partial}{\partial x} f(X_t,Y_t)dX_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(X_t,Y_t)d[Y]_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_t,Y_t)d[X]_t \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(X_t,Y_t)d[X,Y]_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + d[X,Y]_t
\end{aligned}$$

   eli

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + [X,Y]_t$$

   jossa integraalit ovat Ito integraaleja tai poluttaisia riippuen integraalin tulkinnasta.

2. Olkoon $S_t = S_0 \exp\big(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\big)$ ja $B_t = B_0 \exp(rt)$. Laske integraali esitys diskontatulle osakkeelle $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$.

   R. Olkoon $B_0 = 1$.

$$dS_t = S_t \sigma dW_t + S_t \mu dt$$

$$d\frac{S_t}{B_t} = \frac{1}{B_t} dS_t + S_t \frac{d}{B_t^{-1}}$$

ja

$$S_t/B_t = S_0 + \int_0^t \exp(-ru)\sigma dW_u + \int_0^t S_u \exp(-ru)(\mu - r) du$$

Laske myös kvadrattiset variaatiot ja ristivariaatiot $[S,S]_t$, $[\widetilde{S},\widetilde{S}]_t$, $[Z_t, Z_t]$, $[Z_t S_t]$ ja $[Z_t \widetilde{S}_t]$
jossa $Z_t = \exp\big(-\theta W_t - \frac{\theta^2}{2} t\big)$ ja $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

R. Kun sekä Ito integraalit $\int_0^t f(s) dX(s)$ ja $\int_0^t g(s) dY(s)$ että ristivariaatio $[X,Y]_t$ ovat olemassa, Ito integraalien välinen ristivariaatio on

$$\left[\int_0^{\cdot} f(s) dX(s), \int_0^{\cdot} g(s) dY_s \right]_t = \int_0^t f(s) g(s) d[X,Y]_s$$

(Kunita Watanabe yhtälö).

Muistetaan myös että kvadrattinen variaatio on symmetrinen bilineerinen $[X, Y + A] = [Y + A, X] = [Y, X] + [A, X]$, ja jos $t \mapsto A_t$ on rajoitetusti heilahteleva seuraa että $[A,A]_t = [A,X]_t = 0$. Koska

$$dZ_t = -Z_t \theta dW_t$$

ja Browinin likkeelle $[W]_t = t$,

$$[S,S]_t = \int_0^t S_u^2 \sigma^2 du, \quad [Z,Z]_t = \int_0^t Z_u^2 \theta^2 du, [\widetilde{S},\widetilde{S}]_t = \int_0^t \widetilde{S}_u^2 \sigma^2 du,$$
$$[S,Z]_t = -\int_0^t S_u Z_u \sigma_u \theta_u du, \quad [\widetilde{S}, Z]_t = -\int_0^t \widetilde{S}_u Z_u \sigma_u \theta_u du,$$

Olkoon Q_t jolla $\widetilde{W}_t = W_t + \theta t$ on Q Brownin liike. Girsanovin lauseesta seuraa että

$$Z_t = \frac{dQ_t}{dP_t} = \exp\big(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$$

joka toteuttaa $dZ_t = -Z_t \theta dW_t$, $Z_0 = 1$. Osoita että

$$\frac{dP_t}{dQ_t} = \frac{1}{Z_t} = \exp\big(\theta \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\big)$$

joka toteuttaa $d\left(\frac{1}{Z_t}\right) = \frac{1}{Z_t}\theta d\widetilde{W}_t$, $\frac{1}{Z_0} = 1$.

R. koska $E_P(X) = E_P\left(\frac{X}{Z}Z\right) = E_Q(XZ^{-1})$ jossa $Z = \frac{dQ}{dP}$, seuraa mitan vaihtokaavasta että $Z^{-1} = \frac{dP}{dQ}$.

$$Z_t^{-1} = \exp\big(\theta W_t + \frac{1}{2}\theta^2 t\big) = \exp\big(\theta W_t + \theta^2 t - \frac{1}{2}\theta^2 t\big) = \exp\big(\theta\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\big)$$

joka on stokastinen eksponentiaali, eli lineaarisen stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu.

Huomataan etta Z_t^{-1} on Q-martingaali koska $\widetilde{W}_t = W_t + \theta t$ on Q-Brownin liike.

3. Black ja Sholesin mallissa $S_t = S_0\exp(\sigma W_t + \mu t)$, $B_t = B_0\exp(rt)$, laske hinta ja suojausstrategia aasialaiselle optiolle

$$F(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du$$

   Vihje Option suojaustrategian diskontattu arvo on martingaali riskineutraali mitan Q:n suhteen toteuttaa välissä $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t &= \frac{V_t}{B_t} = E_Q\big(\widetilde{F}|\mathcal{F}_t\big) = \frac{e^{-rT}}{T}E_Q\left(\int_0^T S_u du\middle|\mathcal{F}_t\right)\\ &= \frac{e^{-rT}}{T}\left\{\int_0^t S_u du + \int_t^T E_Q(S_u|\mathcal{F}_t)du\right\} := \Phi(t, A_t, S_t)\end{aligned}$$

   jossa $A_u = \int_0^t S_u du$ on derivoituva ajan suhteen, ja $\Phi(t,a,x)$ on sileä funktio. Laske $\Phi(t,a,x)$ ja käytä Iton kaava integraali esityksen laskemiseen,

4. Laske Black ja Scholesin osittaisdifferentiaali yhtälö edellisen tehtävän funktiolle $\Phi(t,a,x)$

   R. 4-5 Riski-neutraali mitan suhteen,

$$\begin{aligned}&S_T = S_t\exp\left(\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) + \big(r - \frac{\sigma^2}{2}\big)(T-t)\right)\\ &E_Q(S_T|\mathcal{F}_t) = S_t E_Q(S_T/S_t|\mathcal{F}_t) =\\ &S_t\exp\left(\big(r - \frac{\sigma^2}{2}\big)(T-t)\right)E_Q\big(\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t)\big) = S_t\exp(r(T-t))\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
V_t &= \frac{\exp(-r(T-t))}{T}\left(A_t + S_t \int_t^T \exp(r(T-u))du\right) \\
&= \frac{\exp(-r(T-t))}{T} A_t + \frac{S_t}{T}\int_t^T \exp(-r(u-t))du \\
&= \frac{\exp(-r(T-t))}{T} A_t + \frac{(1-\exp(-r(T-t)))S_t}{rT} = \Phi(t,T,A_t,S_t)
\end{aligned}
$$

jossa

$$
F(t,T,a,x) = \frac{\exp(-r(T-t))}{T} a + \frac{(1-\exp(-r(T-t)))x}{rT}
$$

Tästä seuraa että suojavan salkun alkupääoma on option hinta hetkellä $t = 0$, jolloin $A_0 = 0$

$$
c(F) = \Phi(0,T,0,S_0) = \frac{(1-\exp(-rT))S_0}{rT}
$$

ja Iton kaavasta seuraa

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,T,A_t,S_t)dt + \frac{\partial}{\partial a}\Phi(t,T,A_t,S_t)dA_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,T,A_t,S_t)d[S]_t + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(t,T,A_t,S_t)dS_t
\end{aligned}
$$

Itserahoittava suojaussalkun arvo on $V_t = \gamma_t S_t + \eta_t B_t$ jossa

$$
\begin{aligned}
\eta_t &= (V_t - \gamma_t S_t)/B_t = \exp(-rT)\frac{A_t}{T}, \\
\gamma_t &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi(t,T,A_t,S_t) = \frac{(1-\exp(-r(T-t)))}{rT}
\end{aligned}
$$

Tästä seuraa myös Black ja Scholesin osittaisdifferentiaali yhtälö

$$
dV_t - \gamma dS_t = \eta dB_t = (V_t - \gamma S_t)rdt =
$$

$$
\left(\Phi(t,T,A_t,S_t) - \frac{\partial}{\partial x}\Phi(t,T,A_t,S_t)S_t\right)rdt =
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,T,A_t,S_t)dt + \frac{\partial}{\partial a}\Phi(t,T,A_t,S_t)S_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,T,A_t,S_t)S_t^2\sigma^2 dt
$$

eli

$$
\Phi(t,T,a,x)r =
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\Phi(t,T,a,x)xr + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,T,a,x) + \frac{\partial}{\partial a}\Phi(t,T,a,x)x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,T,a,x)x^2\sigma^2
$$

Huomataan että option hinta ja suojas-strategia riippuvat parametrista r ja σ^2, mutta ei riipu ollenkaan drifti-parametrista μ.