HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitukset 5 (2.05.2012)

Tehtävissä $\big(W_t : t \in [0,T]\big)$ Brownin liike, eli $W_0(\omega) = 0$, lisäykset ovat P-riippumattomia ja stationaatisia joilla kun $0 \le s \le t$ $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, ja P-melkein varmasti polut $t \to W_t(\omega)$ ovat jatkuvia, joilla on olemassa kvadrattinen variaatio $[W,W]_t = t$.

1. Olkoon x_t, y_t jatkuvat funktiot joilla on olemassa kvadraattiset kovariaatiot, $[x,x]_t$ $[y,y]_t$ ja ristivariaatio $[x,y]_t$.

   Käytä Iton kaavaa funktiolle $f(x,y) = xy$ osoittamaan osittaisintegroinnin kaavaa

   $$x_t y_t = x_0 y_0 + \int_0^t x_s dy_s + \int_0^t y_s dx_s + [x,y]_t$$

   Olkoon $t \mapsto x_t > 0$ jatkuva funktio jolla on kvadrattinen variaatio $[x,x]_t$.

   Laske integraali esitys funktiolle $y_t = f(x_t) = \frac{1}{x_t}$. Laske myös kvadrattinen variaatio $[y,y]_t$ ja ristivariaatio $[x,y]_t$. Vihje: käytä Iton kaavaa.

2. Olkoon $S_t = S_0 \exp\big(\sigma W_t + \mu t\big)$ ja $B_t = B_0 \exp(rt)$. Laske integraali esitys diskontatulle osakkeelle $\widetilde{S}_t = S_t / B_t$.

   Laske myös kvadrattiset variaatiot ja ristivariaatiot $[S,S]_t$, $[\widetilde{S},\widetilde{S}]_t$, $[Z_t, Z_t]$, $[Z_t S_t]$ ja $[Z_t \widetilde{S}_t]$

   jossa $Z_t = \exp\big(-\theta W_t - \frac{\theta^2}{2} t\big)$ ja $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

3. Olkoon Q_t jolla $\widetilde{W}_t = W_t + \theta t$ on Q Brownin liike. Girsanovin lauseesta seuraa että

   $$Z_t = \frac{dQ_t}{dP_t} = \exp\big(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\big)$$

   joka toteuttaa $dZ_t = -Z_t \theta dW_t$, $Z_0 = 1$. Osoita että

   $$\frac{dP_t}{dQ_t} = \frac{1}{Z_t} = \exp\big(\theta \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\big)$$

   joka toteuttaa $d\left(\frac{1}{Z_t}\right) = \frac{1}{Z_t}\theta d\widetilde{W}_t$, $\frac{1}{Z_0} = 1$.

4. Black ja Sholesin mallissa $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t)$, $B_t = B_0 \exp(rt)$, laske hinta ja suojausstrategia aasialaiselle optiolle

$$F(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$$

Vihje Option suojaustrategian diskontattu arvo on martingaali riski-neutraali mitan Q:n suhteen toteuttaa välissä $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_t = \frac{V_t}{B_t} &= E_Q\big(\widetilde{F}|\mathcal{F}_t\big) = \frac{e^{-rT}}{T} E_Q\left(\int_0^T S_u du \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{e^{-rT}}{T}\left\{\int_0^t S_u du + \int_t^T E_Q(S_u|\mathcal{F}_t) du\right\} := \Phi(t, A_t, S_t) \end{aligned}$$

jossa $A_u = \int_0^t S_u du$ on derivoituva ajan suhteen, ja $\Phi(t,a,x)$ on sileä funktio. Laske $\Phi(t,a,x)$ ja käytä Iton kaava integraali esityksen laskemiseen,

5. Laske Black ja Scholesin osittaisdifferentiaali yhtälö edellisen tehtävän funktiolle $\Phi(t,a,x)$