HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitukset 4 (11.04.2012)

1. Olkoon $\big(W_t : t \in [0,T]\big)$ Brownin liike, eli $W_0(\omega) = 0$, lisäykset ovat P-riippumattomia ja stationaatisia joilla kun $0 \le s \le t$ $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, ja P-melkein varmasti polut $t \to W_t(\omega)$ ovat jatkuvia.

   Osoita:

   (a) $\big(-W_t : t \in [0,T]\big)$ on Brownin liike.

   (b) $\big((W_{T-t} - W_T) : t \in [0,T]\big)$ on Brownin liike.

   (c) Kun $a > 0$, $\big(\sqrt{a} W_{t/a} : t \in [0,T]\big)$ on Brownin liike.

   (d) Olkoon $X_0 = 0$ ja $X_t = t W_{1/t}$.
   Osoita että $\lim\limits_{t \downarrow 0} X_t = 0$ ja $(X_t : t \ge 0)$ on Brownin liike.

2. Olkoon $\big(W_t : t \ge 0\big)$ Brownin liike. Osoita että $M_t = (W_t^2 - t)$ on martingaali Brownin liikkeen virittämässä filtraatiossa

   $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W : t \ge 0)$, jossa $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \le s \le t)$.

3. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ jatkuva jolla on kvadrattinen variaatio $[X]_t = [X,X]_t$, ja $t \mapsto A_t \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

   Osoita että A on rajoitetusti heilähtelevä eli on kahden ei-vähenevien funktioiden erotus, ja siksi $[A,A] = 0$

4. Olkoon $Y_t = A_t + X_t$, jossa A_t on rajoitetusti heilähtelevä ja X_t:lla on kvadrattinen variaatio $[X,X]_t$. Muistetaan että $[Y,Y]_t = [X,X]_t$.

   Muista Iton kaava:

$$\int_0^t F_x(X_s) dX_s = F(X_t) - F(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(X_s) d[X,X]_s$$

   Muistetaan myös että jos $Z_t = \int_0^t F_x(X_s) dX_s$,

$$[Z,Z]_t = [F(X_., F(X_.)]_t = \int_0^t F_x(X_s)^2 d[X,X]_s$$

   Laske poluttaiset Ito integraalit

   (a)

$$\int_0^t X_s^n dX_s, \quad n \in \mathbb{N}$$

(b)

$$\int_0^t \exp(\sigma X_s^n) dX_s, \quad n \in \mathbb{N}$$

(c)

$$\int_0^t \sin(\sigma X_s) dX_s,$$

(d)

$$\int_0^t \cos(\sigma X_s) dX_s,$$

(e)

$$\int_0^t Y_s^n dY_s$$

(f)

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n) dY_s$$

(g)

$$\int_0^t A_s^n dA_s$$

(h)

$$\int_0^t \exp(\sigma A_s^n) dA_s$$

(i)

$$\int_0^t \sin(\sigma A_s) dA_s,$$

(j)

$$\int_0^t \cos(\sigma A_s) dA_s,$$

(k)

$$\int_0^t Y_s^n dX_s$$

(l)

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n) dX_s$$

Laske myös yllä olevien Ito-integraalien kvadrattinen variaatio.