HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus 3 (4.04.2014)

1. **Amerikkalaiset optiot epätäydellisessä mallissa .**

   Todennäköisavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, oletamme markkinamallia jossa on kaksi rahoitusinstrumenttia $(B_t(\omega), S_t(\omega) : t = 0, 1, \dots, T)$, ei negatiivisia ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,\dots,T}$-sopivia (adapted).

   Voidaan olettaa että σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ on triviaali, siis B_0 ja S_0 deterministisia.

   Olkoon $(G_t(\omega))_{t=1,2,\dots,T}$ amerikkalainen optio, siis oikeus lunastaa kerran $G_t(\omega)$ valitulla hetkellä $t \in \{1, \dots, T\}$.

   Olkoon $\mathcal{Q}$ eqvivalentti martingaali mittojen joukko numeräärillä $S^{(0)}$. Oletamme että (B, S) markinamalli ei ole täydellinen, siis $\mathcal{Q}$ sisältää useita riskineutraalimittoja.

   Merkitsemme diskontatut prosessit

   $$S_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t(\omega), \quad G_t(\omega) = G_t(\omega)/B_t(\omega)$$

   (a) Osoita että hetkellä $t = 0$ amerikkalaisen option $(G_t(\omega))_{t=1,\dots,T}$ arbitraasivapaaiden hintojen joukko $\mathcal{C}$ on yksikäsitteinen jos ja vain jos $U_0^+ = U_0^-$, ja muuten $\mathcal{C}$ on avoin väli (U_0^-, U_0^+) , jossa määritellään rekursivisesti

   $$\begin{aligned}
   U_T^+(\omega) &= U_T^-(\omega) = G_T(\omega), \\
   U_t^+(\omega) &= \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^+/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\}, \qquad t = 1, \dots, T-1 \\
   U_0^+(\omega) &= B_0 \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega)) \\
   U_t^-(\omega) &= \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^-/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\} \quad t = 1, \dots, T-1 \\
   U_0^-(\omega) &= B_0 \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega)) \quad t = 0
   \end{aligned}$$

   Vihje: katso ensi mitä tapahtuu kun $T = 2$.

   (b) Osoita että

   $$U_0^+ = B_0 \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau), \qquad U_0^- = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(\widetilde{G}_\tau)$$

   jossa $\mathcal{T}_0$ on pysähdyshetkien joukko, $\widetilde{G}_t := G_t/B_t$ on diskontattu amerikkalaisen option sisäinen arvo.

(c) Osoita että

$$\tau_{\min}(\omega) = \inf\Big\{1 \le t \le T :\ G_t \ge\ B_t(\omega) \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\Big\}$$

ja

$$\tau_{\max}(\omega) = \inf\Big\{1 \le t \le T :\ G_t >\ B_t(\omega) \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U^+_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\Big\}$$

ovat pysähdyshetkiä jolla $\tau_{\min} \le \tau_{\max}$ P-melkein varmasti.

(d) Osoita että option ostajan ei kannata lunastaa optionsa ennen hetkeä $\tau_{\min}(\omega)$ eikä hetken $\tau_{\max}(\omega)$ jälkeen.

Kirjallisuus: Tätä problematiikkaa käsitellään muun muassa luvussa 6.3 Föllmerin ja Shiedin *Stochastic Finance* kirjassa.

2. Olkoon Black ja Scholes jaktuvaaikaisessa markkinamallissa instrumenteilla $(B_t, S_t : r \in \mathbb{R}^+)$, $B_t = \exp(rt)$ jossa $r > 0$ on deterministinen korko, ja

$$S_t = S_0 \exp\big(\sigma W_T + \big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)T\big)$$

jossa $(W_t : t \in [0,T])$ on Brownin liike todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Differentiaalimuodossa

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + rdt),\ \text{eli}\ S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u + \int_0^t S_u r du$$

$$dB_t = B_t r dt,\ B_t = B_0 + \int_0^t B_u r du$$

jossa $\int_0^t S_u \sigma dW_u$ on Iton integraali.

(a) Osoita että P on riskineutraali numeräärin B_t:n suhteen, eli $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = \{\ \mathcal{F}^W_t\}$, jossa $\mathcal{F}^W_t = \sigma(W_s : 0 \le s \le t)$.

(b) Laske hinta europpalaiselle osto optiolle $X(\omega) = (S_T - K)^+$ binomipuumalli approximatiolla, jossa kun $k = 1, \dot{,} N$,

$$B_{kT/N} = B_{(k-1)T/N}\big(1 + rT/N\big)$$
$$S_{kT/N} = S_{(k-1)T/N}\big(1 + rT/N + \xi_k \sigma\sqrt{T/N}\big)$$

ja satunnaismuuttujat ξ_k ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita, jolla

$$P(\xi_k = 1) = 1 - P(\xi_k = -1) = 1/2\ .$$