HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus 2 (28.03.2014)

1. Olkoon τ pysähdyshetki filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$. Osoita että $(\tau + 1)$ on $\mathbb{F}$-pysähdyshetki. Onko $(\tau - 1)$ aina $\mathbb{F}$-pysähdyshetki ?

2. Osoita että M_t on $(P, \mathbb{F})$-martingaali jos ja vain jos M_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja

$$E_P\left(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta M_s\right) = 0$$

kaikille $\mathbb{F}$-ennustettaville ja rajoitetuille prosesseille $(Y_t(\omega))$.

Osoita myös että että X_t on $(P, \mathbb{F})$-ylimartingaali jos ja vain jos X_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja

$$E_P\left(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s\right) \le 0$$

kaikille $\mathbb{F}$-ennustettaville rajoitetuille prosesseille $Y_t(\omega) \ge 0$ (ei-negatiivisia).

3. Osoita että prosessi $(M_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ on $(P, \mathbb{F})$-ylimartingaali jos ja vain jos $E_P(M_\tau\ ) \le E(M_0)$ kaikille $\mathbb{F}$-pysähdyhetkille τ.

4. Binomipuumallissa $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega = \{0, 1\}^T$, $P(\{\ \omega\}) > 0\ \forall \omega \in \Omega$ referenssitodennäköisyyden P:n suhteen,

$$B_t = (1 + r)^t, \quad S_t = S_0 \prod_{s=1}^{T} \big(1 + d + (u - d)\omega_t\big)$$

jossa $T = 2, S_0 = 150, u = 2/5, d = -1/5, , r = 1/10$, ja

$$q = \frac{r - d}{u - d} = Q(\omega_t = 1|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 - Q(\omega_t = 0|\mathcal{F}_{t-1})$$

Laske hinta ja suojaustrategia amerikkalaiselle myyntioptiolle

$$\big(F_t : 0 \le t \le T\big)$$

jossa $F_t = \max_{0 \le s \le t}\{\ (140 - S_u)^+\}$.

Vihje Laske induktiolla ensin option sisäinen arvo jokaisella hetkellä $t = 2, 1, 0$ ja $\omega \in \Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.