HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus 1 (21.03.2014)

Tarkastellaan binomimalli jossa $S_0 = B_0 = 1$, $B_t = (1+r)^t B_0$, ja

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + R_s(\omega)), \quad \text{jossa referenssi mitan } P\text{:n suhteen}$$
$$P(R_t(\omega) = u | \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = P(R_t(\omega) = u) =$$
$$1 - P(R_t(\omega) = d | \mathcal{F}_{t-1}) = 1 - P(R_t(\omega) = u) = 1/2$$

$-1 < d < r < u$ ovat deterministisia, $t = 0, 1, \dots, T$.

Kun valitaan riskitön instrumentti B_t numerääriksi, ja merkitään osakkeen diskontattu arvoprosessi $\widetilde{S}_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t$, riskineutraali todennäköisyyden Q:n suhteen jolla $\widetilde{S}_t$ on $\mathbb{F}$-martingaali, jossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(R_1, \dots, R_t)$.

$R_t(\omega)$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita joilla

$$Q(R_t = u | \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 - P(R_t(\omega) = d | \mathcal{F}_{t-1}) = Q(R_t = u) = 1 - Q(R_t = d) = q = \frac{r-d}{u-d}$$

Olkoon $X_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\mathbf{1}(R_s = u) 2 - 1 \big)$ satunnaiskulku, eli referenssi todennäköisyyden suhteen

$$P(\Delta X_t = 1) = P(R_t = u) = 1 - P(\Delta X_t = -1) = 1 - P(R_t = d) = 1/2$$

ja

$$X_t^* = \max_{1 \le s \le t} X_s$$

satunnaiskulun joukseva maksimi.

Oletamme jatkossa että

$$(1+u) = (1+d)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad d = \frac{u}{1+u},$$
$$\Longrightarrow q = \frac{(1+u)r - u}{u^2}$$

Silloin voidaan esittää

$$S_t = S_0 (1+u)^{X_t}$$

ja siksi

$$S_t^* := \max_{1 \le s \le t} S_s = S_0(1+u)^{X_t^*} \tag{0.1}$$

(Huomataan että ilman oletusta $(1+d) = (1+u)^{-1}$ (0.1) ei päde !

1. Laske

$$P(X_t = k)$$

referenssi todennäköisyyden P:n suhteen.

2. Osoita satunnaiskulun hejastusperiaate

$$P(X_t^* \ge k,\ X_t = k-l) = P(X_t = k+l)$$
$$P(X_t^* = k\ X_t = k-l) = P(X_t^* \ge k\ X_t = k-l) - P(X_t^* \ge (k+1)\ , X_t = k-l)$$

referenssi todennäköisyyden P:n suhteen.

Vihje Kuvassa 1 esintyvät polku X_t ja sen hejastus X'_t joka on hejastettu tasolle $k = 3$ seuraavalla tavalla:

kun $\tau(\omega) = \min\{t : X_t(\omega) \ge k\}$

$X'_t(\omega) = X_t(\omega)$ jos $t < \tau(\omega)$,

$X'_t(\omega) = X_t(\omega) - 2\big(X_t(\omega) - X_{\tau(\omega)}(\tau(\omega))\big)$.

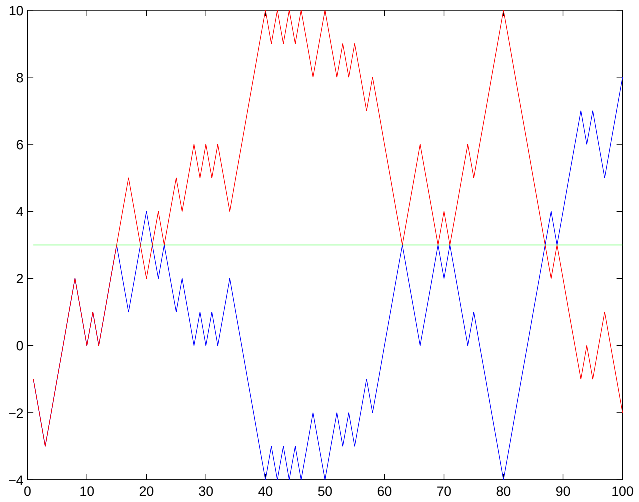
Jokaisen X_t polun joka kulkee k tason yläpuolella ja päätyy k tason alapuolelle, vastaa yksikäsitteinen hejastettu polku X'_t joka päätyy k tason yläpuolella.

P todennäköisyys on symmetrinen, kaikki polut ovat yhtä todennäköisiä.

3. Osoita että uskottavuusosamääräprosessi riskineutraali ja referenssi todennäköisyyden välissä on

$$Z_t(\omega) = \frac{dQ|\ _{\mathcal{F}_t}}{dP|\ _{\mathcal{F}_t}}(\omega) = \frac{q}{p}^{Y_t} \frac{1-q}{1-p}^{t-Y_t}$$
$$\text{jossa } Y_t = \frac{t+X_t}{2} = \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}(R_t = 1)$$

riskineutraali.



Kuva 1: Satunnaispolku ja sen hejastus, hejastettu tasolle $k = 3$.

4. Laske polkuriippuvaisten optioiden ja suojausstrategiat (B_t, S_t) markkinamallissa

   (a) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T^* - S_T)$.
   (b) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T - k)^+ \mathbf{1}(S_T^* \geq c)$ jossa $0 < k < c$.
   (c) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T - k)^+ \mathbf{1}(S_T^* < c)$

   Vihje Käytä hinnoittelu kaava:

$$c(F) = B_0 E_Q\left(\frac{F}{B_T}\right) = B_0 E_P\left(Z_T \frac{F}{B_0}\right) = B_0 E_P\left(z_T(S_T) \frac{f(S_T, S_T^*)}{B_0}\right) =$$

   jossa P on symmettrisen satunnaiskulun jakauma ja

$$Z_T = \frac{dQ_T}{dP_T} = z_T(S_T)$$

   on uskottavuusosamäärä mitanvaihto kaavassa.

   Suojausstrategian laskemiseen käytä kaava

$$\frac{1}{B_0} F(\omega) = E_Q(\widetilde{F}) + \sum_{s=1}^{T} \frac{E_Q(\nabla_s \widetilde{F} | \mathcal{F}_{s-1})}{E_Q(\nabla_s \widetilde{S}_s | \mathcal{F}_{s-1})} \Delta \widetilde{S}_s$$
$$\widetilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{B_T}, \quad \widetilde{S}_t(\omega) = \frac{S_t(\omega)}{B_t},$$

   ja esitä ehdolliset odotusarvot riskineutraalitodennäköisyyden suhteen abstrakti Bayesin kaavan avulla, jossa ehdolliset odotusarvot lasketaan referenssimitan P:n suhteen.