Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus matemaattisen rahoitusteoriaan II
Harjoitus 2, 28.03.2014
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Näytetään, että $\{\tau+1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla t. Koska τ on pysäytyshetki filtraatiossa $\mathbb{F} = (F_t)$ ja filtraatio on kasvava, niin

$$\{\tau + 1 \leq t\} = \{\tau \leq t - 1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t$$

kaikilla t. Yleisesti $\tau - 1$ ei ole pysäytyshetki, sillä filtraatio $\mathbb{F}$ voi olla aidosti kasvava (tai jollain arvolla t) .

2. (a) ($\Rightarrow$). Oletetaan, että M_t on $\mathbb{F}$-martingaali. Tällöin M_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja $\mathbb{E}(\Delta M_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) = 0$. Lisäksi kaikille $\mathbb{F}$- ennustettaville ja rajoitetuille prosesseille $\{Y_t\}$ pätee

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta M_s\big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta M_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\big)\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \mathbb{E}\big(\Delta M_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\big)\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{s=1}^{t} Y \cdot 0\Big) = 0.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$). Merkitään $Z_t = \sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s$ kaikilla t. Tällöin

$$\mathbb{E}\Big(Y_t \mathbb{E}(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\Big) = \mathbb{E}(Y_t \Delta M_t) = \mathbb{E}(Z_t - Z_{t-1}) = 0.$$

Koska tämä pätee kaikille ennustettaville ja rajoitetuille prosesseille $\{Y_t\}$, niin välttämättä $\{M_t\}$ on martingaali.

(b) ($\Rightarrow$).Oletetaan, että X_t on $\mathbb{F}$-ylimartingaali. Tällöin X_t on $\mathbb{F}$-sopiva ja $\mathbb{E}(\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) \leq 0$. Koska X_t on $\mathbb{F}$-ylimartingaali, niin kaikille $\mathbb{F}$- ennustettaville ja rajoitetuille prosesseille $\{Y_t\}$ pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s\big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \mathbb{E}\big(\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}\big)\Big) \\
&\leq \mathbb{E}\Big(\sum_{s=1}^{t} Y_s \cdot 0\Big) = 0.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$). Väite seuraa analogisesti (a)-kohdasta vaihtamalla yhtäsuuruusmerkki epäyhtälömerkillä ”$\leq$”.

3. ($\Rightarrow$). Huomataan, että $M_\tau \leq N =: \sup_{0\leq t\leq T}\{X_t\}$. Koska X_t on ylimartingaali, niin $\mathbb{E}(X_t) \leq \mathbb{E}(M_0)$ kaikilla t, joten

$$\mathbb{E}(M_\tau) \leq \mathbb{E}(N) \leq \mathbb{E}(M_0).$$

($\Leftarrow$). Ei voidaan todista ilman lisäoletusta tai oletuksen pitäisi muotoilla uudelleen.

4. Määritetään annetun amerikkalaisen option $F = (F_t)$ hinnan. Tämän option arvo hetkellä t on

$$U_t = \begin{cases} F_2, & \text{kun } t = 2 \\ \max\{F_t, \mathbb{E}_Q\Big(\frac{U_{t+1}}{1+r} \mid \mathcal{F}_t\Big)\}, & \text{kun } t = 0, 1. \end{cases}$$

Merkitään joukon Ω ositukset $A = \{(0,0),(0,1)\}$ ja $B = \{(1,0),(1,1)\}$. Laskemalla rekursiivisesti saadaan kysytyn amerikkalaisen option hinnaksi

$$\begin{aligned}
U_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(U_1) = \frac{10}{11}\Big(\mathbb{E}(U_1 \mid A)\cdot q + \mathbb{E}(U_1 \mid B)\cdot p\Big) &= \frac{10}{11}\Big(0\cdot\frac{1}{2} + 29,0909...\cdot\frac{1}{2}\Big) \\
&\approx 13,22.
\end{aligned}$$

Määritetään option suojattava strategia (h_t), missä portfolio $h_t = (X_t, Y_t)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$ mitallinen ja $t = 1, 2$. Ratkaisemalla yhtälöparista ehdosta $V_t^{h(t)} = U_t$ saadaan

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{U_d(t)\cdot(1+u) - U_u(t)\cdot(1+d)}{u-d}\cdot\dfrac{1}{1+r} \\[2ex] Y(t) = \dfrac{U_u(t) - U_d(t)}{S_u(t) - S_d(t)} \end{cases}$$

Hetkellä $t = 1$ on suojattava salkulla
$$\begin{cases} X(1) = \dfrac{29,0909 \cdot 1,4 - 0 \cdot 0,8}{0,4 - (-0,2)} \cdot \dfrac{1}{1 + 0,1} \approx 61,708 \\ Y(1) = \dfrac{0 - 29,0909}{210 - 120} \approx -0,323. \end{cases}$$
Hetkellä $t = 2$ on suojattava salkulla

$$h(2) = h(2)\mathbf{1}_A + h(2)\mathbf{1}_B = h(2)\mathbf{1}_A \approx (69,091; 0,333)\mathbf{1}_A.$$