Logik I

Åsa Hirvonen
Helsingfors universitet

Våren 2013

Inledning

Logik är läran om härledning. Med hjälp av logiken kan vi säga när ett resonemang är korrekt och när det inte är det. För att kunna studera resonemang på ett matematiskt exakt vis, måste vi definiera vad vi menar med resonemang och påståenden. De matematiska begrepp vi definierar kan naturligtvis inte fånga alla delar och nyanser av mänskligt tänkande, men för matematiska bevis är de väl lämpade.

På den här kursen studerar vi satslogik och predikatlogik. Satslogiken är egentligen ett fragment av predikatlogiken. Den befattar sig med enkla påståendesatser som

Det regnar och vi kör bil.
Ifall jag glömmer paraplyet blir jag våt.

Predikatlogiken eller första ordningens logik har en större uttrycksförmåga. Med den kan vi undersöka härledningar av formen

Alla människor är dödliga.
Sokrates är en människa.
___
Sokrates är dödlig.

eller formellt uttryckt

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(P(x) \to Q(x))\\ P(a)\end{array}}{Q(a)}$$

Predikatlogiken är den logik vi behöver för att studera matematiska bevis. Av pedagogiska skäl börjar vi ändå med satslogiken som ger oss en bild av de metoder vi skall använda men undviker många av predikatlogikens svårigheter.

Två centrala begrepp inom logiken är *syntax* och *semantik*. Med syntax avser vi reglerna för det formella språk vi använder. Vilka tecken är tillåtna i formlerna? Vilken form får formlerna ha? Semantiken befattar sig med formlernas tolkning. Semantiken inom predikatlogiken avser de modeller vi betraktar. Inom satslogiken innebär semantiken sanningsvärdet i påståendena.

Det här materialet består av två delar. Den första behandlar satslogik, den andra predikatlogik. Vi följer i stort uppläggningen och innehållet i Jouko Väänänens kursmaterial "Logik One" [3]. Andra inspirationskällor har utgjorts av [1] och [2].

1 Satslogik

1.1 Formler

Satslogiken studerar ord som *inte*, *och*, *eller* och *om ... så*. Den studerar hur strukturen av påståenden påverkar deras sanningshalt och beroendeförhållanden oberoende av sakinnehållet i påståendena. Satslogiken behandlar endast påståendesatser dvs. satser som uttrycker ett sakförhållande. Frågesatser, imperativa satser och andra språkliga satser som inte är konstaterande faller utanför satslogikens ramar.

De minsta beståndsdelarna i satslogiken är *enkla* eller *atomära satser*. De består av enskilda påståenden som inte kan spjälkas upp i mindre helheter med hjälp av ord som "inte", "och" och "eller". Exempel på atomära satser är:

Det regnar.
Bilen är blå.

Sammansatta satser byggs upp med hjälp av *konnektiv*. På den här kursen använder vi konnektiven *inte*, *och*, *eller*, *om... så* och *om och endast om*. Vi kommer senare dels att se att det finns fler tänkbara konnektiv, dels att förstå varför vi inte behöver granska dem skilt. Exempel på sammansatta satser är:

Jag tar bilen endast om det regnar.
Vi städar och ni diskar.

Eftersom vi är intresserade av satsernas struktur och sanningshalt, men inte själva sakinnehållet, abstraherar vi bort den här "onödiga" informationen och ersätter de atomära satserna med satssymboler

$$p_0, p_1, \dots$$

Vi introducerar också symboler för konnektiven:

Symbol	Tolkning	Namn
$\neg$	inte	negation
$\wedge$	och	konjunktion
$\vee$	eller	disjunktion
$\to$	om ... så ...	implikation
$\leftrightarrow$	om och endast om	ekvivalens

På så sätt kan vi skriva om givna satser på ett sätt som understryker deras struktur. Vi kan t.ex. definiera

p_0	Det regnar.
p_1	Jag glömde paraplyet.
p_2	Jag blir våt.

Nu kan satsen *Om det regnar och jag glömde paraplyet så blir jag våt.* skrivas $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$. Den något pessimistiska satsen *Om jag glömde paraplyet så regnar det.* blir $p_1 \to p_0$.

För att kunna bevisa något generellt om *alla* satslogiska formler behöver vi en formell definition för vad en formel är. En sådan här definition gör satslogiken till ett *formellt språk*, dvs. ett systematiserat språk med explicita regler för hur språkets symboler får kombineras.

Definition 1. En satslogisk formel är en ändlig följd (teckensträng) bestående av satssymboler p_0, p_1, p_2,..., konnektiv $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ och parenteser '(', ')', konstruerad enligt följande:

1. Varje satssymbol $p_0, p_1, p_2, \ldots$ är en satslogisk formel.

2. Om A är en satslogisk formel så är $\neg A$ en satslogisk formel.

3. Om A och B är formler, så är $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ och $(A \leftrightarrow B)$ satslogiska formler.

4. Endast teckensträngar bildade enligt 1–3 ovan är satslogiska formler.

Det här är ett exempel på en *induktiv* definition. Istället för att explicit säga hur en formel ser ut (vilket skulle vara omöjligt) beskriver definitionen hur formler stegvis byggs upp från enklare formler genom upprepade tillämpningar av en regel. Man kan bevisa att definitionen ovan entydigt definierar den minsta mängd formler som innehåller alla satssymboler och är sluten under de operationer reglerna 2–3 ovan beskriver.

Anmärkning 2. För enkelhets skull utelämnar vi ofta parenteser där tolkningen är otvetydig. Så skriver vi t.ex. $A \wedge B$ istället för $(A \wedge B)$. Däremot är tolkningen av $A \rightarrow B \rightarrow C$ inte unik så här måste vi specificera om vi menar $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ eller $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. När vi studerar sanningsvärden skall vi se att formler som $A \wedge B \wedge C$ är entydiga trots att de kan tolkas som både $(A \wedge B) \wedge C$ och $A \wedge (B \wedge C)$. Orsaken är att formlerna i fråga är ekvivalenta, dvs. har samma betydelse.

Då vi undersöker en satslogisk formel är strukturen det viktiga. Hur är den uppbyggd? I vilken ordning har delarna pusslats ihop? Behändiga begrepp i de här betraktelserna är *huvudkonnektiv* och *delformler*.

Definition 3. En satslogisk formels *huvudkonnektiv* är det konnektiv som har tillämpats sist enligt 2–3 i Definition 1 i den stegvisa konstruktionen av formeln.

T.ex. i formeln $(\neg A \wedge (B \rightarrow \neg C))$ är huvudkonnektivet en konjunktion.

Definition 4. Om A är en satssymbol så är A den enda delformeln till A.
Delformlerna till $\neg A$ är $\neg A$ samt delformlerna till A.
Delformlerna till $A \wedge B$ är $A \wedge B$ samt delformlerna till A och B.
Delformlerna till $A \vee B$ är $A \vee B$ samt delformlerna till A och B.
Delformlerna till $A \rightarrow B$ är $A \rightarrow B$ samt delformlerna till A och B.
Delformlerna till $A \leftrightarrow B$ är $A \leftrightarrow B$ samt delformlerna till A och B.

T.ex. har formeln $((p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow \neg p_2)$ delformlerna $((p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow \neg p_2)$, $(p_0 \rightarrow p_1)$, $\neg p_2$, p_0, p_1 och p_2.

De *direkta delformlerna* är de delformler som huvudkonnektivet sammanbinder. Det här innebär att bara sammansatta formler kan ha direkta delformler.

Definition 5. Den direkta delformeln till $\neg A$ är A.
De direkta delformlerna till $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ och $A \leftrightarrow B$ är A och B.

Lemma 6 (Induktionsprincipen för satslogiska formler)**.** *Anta att P är mängden av satslogiska formler och Q är en delmängd av P som uppfyller följande villkor:*

1. *varje satssymbol p_n tillhör Q,*

2. *om A tillhör Q så tillhör $\neg A$ också Q,*

3. *om A och B tillhör Q så tillhör $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, och $(A \leftrightarrow B)$ också Q.*

Då är $Q = P$.

Bevis. Vi reducerar principen till vanlig induktion (över de naturliga talen) genom att betrakta antalet konnektiv i formlerna. Så vi introducerar en hjälpfunktion

$$kon : P \to \mathbb{N}, \quad kon(A) = \text{antalet konnektiv i } A.$$

Eftersom en formel är en teckensträng är *kon* väldefinierad (dvs. antalet konnektiv i en formel är entydigt). Vi är nu intresserade av egenskapen

$E(n)$: Om A är en satslogisk formel och $kon(A) = n$ så tillhör A mängden Q.

Vi visar att $E(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$.
Bassteg: $n = 0$: Om $A \in P$ och $kon(A) = 0$ så är A en satssymbol och tillhör Q på basen av (1) ovan.
Induktionssteg: Vi antar att $n \geq 0$ och $E(k)$ är sant för alla $k \leq n$ (*induktionshypotes*) och visar att $E(n+1)$ är sant. Så låt A vara en satslogisk formel så att $kon(A) = n + 1$. Från Definition 1 kan vi se alternativen för vad A kan vara. Eftersom $k + 1 > 0$, kan A inte vara en satssymbol, så följande alternativ återstår:

- $A = \neg B$. Eftersom $\neg$ är ett konnektiv är $kon(A) = 1 + kon(B)$. Således är $kon(B) = n$ och enligt induktionshypotesen har vi $B \in Q$. Enligt (2) ovan måste då också $A \in Q$.

- $A = (B \wedge C)$, $A = (B \vee C)$, $A = (B \to C)$ eller $A = (B \leftrightarrow C)$. Då har vi $kon(A) = kon(B) + 1 + kon(C)$ så både $kon(B) \leq n$ och $kon(C) \leq n$. Således ger induktionshypotesen $B \in Q$ och $C \in Q$, vilket enligt (3) ovan ger $A \in Q$.

Slutsats: $E(n)$ håller för alla $n \in \mathbb{N}$ och således har vi $P \subseteq Q$. $\square$

Reduktionen till klassisk induktion kunde ha gjorts på flera olika sätt. Vi kunde t.ex. ha använt hjälpfunktionen $\#A$ = antalet symboler i A. Då hade bassteget börjat vid $n = 1$ men i övrigt hade beviset sett i stort sett likadant ut.

Bevis som använder induktionsprincipen ovan kallas ofta *strukturell induktion*. Nedan ett klassiskt exempel:

Exempel 7. Visa att varje satslogisk formel innehåller lika många höger- som vänsterparenteser.

Bevis. Definiera $HP(A)$=antalet högerparenteser i A och $VP(A)$=antalet vänsterparenteser i A. Vi visar med strukturell induktion att $VP(A) = HP(A)$ för alla satslogiska formler A.
Bassteg: A är en satssymbol. Då är $VP(A) = 0 = HP(A)$.
Induktionssteg: Steget består av följande fall:

- $A = \neg B$ och (induktionshypotes:) $VP(B) = HP(B)$. Då är $VP(A) = VP(B) = HP(B) = HP(A)$.

- $A = (B \wedge C)$, $A = (B \vee C)$, $A = (B \to C)$ eller $A = (B \leftrightarrow C)$ och (induktionshypotes:) $VP(B) = HP(B)$ och $VP(C) = HP(C)$. Då är $VP(A) = 1 + VP(B) + VP(C) = 1 + HP(B) + HP(C) = HP(A)$.

$\square$

1.2 Sanningsvärden och sanningsvärdetabeller

Som tidigare konstaterats undersöker satslogiken påståenden som är antingen sanna eller falska. Det här är också den enda information satslogiken ser i atomära påståenden. Därför är det naturligt att satslogikens semantik, dvs. betydelsen i formlerna, bestäms av de sanningsvärden satssymbolerna har.

Definition 8. En *värdering* är en funktion $v : \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$.

En värdering ger alltså varje satssymbol ett *sanningsvärde*: 1 (sann) eller 0 (falsk). Med sanningsvärdena för satssymbolerna bestämda kan vi induktivt definiera sanningsvärdena för godtyckliga satslogiska formler.

Definition 9. Låt A vara en satslogisk formel och v en värdering. Sanningsvärdet för A, $v(A)$, bestäms enligt följande:

1. Om A är p_n är $v(A)$ redan definierat.
2. Om A är $\neg B$ och $v(B)$ är definierat är $v(A) = 1$ om och endast om $v(B) = 0$.
3. Om A är $(B \wedge C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om både $v(B) = 1$ och $v(C) = 1$.
4. Om A är $(B \vee C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om åtminstone det ena av värdena $v(B)$ och $v(C)$ är 1.
5. Om A är $(B \to C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om åtminstone det ena av villkoren $v(B) = 0$ eller $v(C) = 1$ uppfylls.
6. Om A är $(B \leftrightarrow C)$ och $v(B)$ och $v(C)$ är definierade är $v(A) = 1$ om och endast om $v(B) = v(C)$.

Ett enkelt sätt att åskådliggöra definitionen ovan är genom *sanningsvärdetabeller* (eller *sanningstabeller*). Tabell 1 visar sanningsvärdetabellerna för konnektiven.

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabell 1: Sanningsvärdetabeller för konnektiven

Negationenes, konjunktionens och ekvivalensens sanningsvärden är mycket naturliga. De mindre självklara fallen är disjunktion och implikation.

För disjunktionen måste vi välja mellan två möjligheter. Satserna

> Utfärden inhiberas om det regnar eller är för kallt.
> I priset ingår en bulle eller en bakelse.

visar två möjliga användningar av “eller”. I den första satsen är det knappast tänkt att utfärden blir av om det både regnar och är kallt. Här är “eller” *inklusivt* eller *inkluderande* dvs. det inbegriper fallen

> Det regnar.
> Det är för kallt.
> Det regnar och det är för kallt.

Den andra satsen är ett exempel på *uteslutande* “eller”: i priset ingår en bulle eller en bakelse men inte båda. I logiken används $\vee$ för inklusivt “eller”.

Implikationen $A \to B$ skulle vi intuitivt vilja definiera som “A leder till B”. Eftersom semantiken bara ser till sanningsvärdena på A och B kan vi emellertid inte fånga så komplexa begrepp. Hur skall vi då definiera sanningsvärdet för $A \to B$? Idén bakom definitionen är att vi fångar påståendet “om A är sann så är B sann”. Det här förklarar sanningsdefinitionen i de fall A är sann. Det knepiga är hur vi skall tolka definitionen då A är falsk. Enligt definitionen är $A \to B$ då alltid sann. Ett sätt att förstå definitionen är att se på ett exempel:

> A: n är delbart med 4.
> B: n är jämt.

I det här fallet leder A faktiskt till B så då är det naturligt att kräva att $A \to B$ är sann oberoende av vad n är. Valen $n = 2$ och $n = 3$ ger oss då de rader i sanningsvärdetabellen där A är falsk.

Sanningsvärdetabeller är inte enbart behändiga för att visualisera konnektivens semantik. De ger oss också ett behändigt sätt att undersöka sanningsvärdena för en formel under *alla möjliga värderingar*. I kolumnerna längst till vänster räknar vi upp alla satssymboler som förekommer i formeln. Höger om dem skriver vi ut formeln så att varje satssymbol och konnektiv bildar en egen kolumn. Raderna i tabellen motsvarar alla möjliga sanningsvärdeskombinationer satssymbolerna kan få. Då vi fyller i tabellen börjar vi med att systematiskt lista de här kombinationerna under satssymbolerna till vänster. Sedan fyller vi stegvis i tabellens högra del enligt följande:

1. Skriv ut sanningsvärdena för satssymbolerna (kopiera dem från kolumnerna till vänster på samma rad).

2. Granska delformlerna i formeln. Då vi bestämt sanningsvärdena för de direkta delformlerna till en formel kan vi bestämma formelns sanningsvärde och skriva in det i kolumnen under huvudkonnektivet.

3. Upprepa steg 2 tills hela tabellen är ifylld.

Exempel 10. Vi konstruerar en sanningsvärdetabell för formeln $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$.

De satssymboler som förekommer i formeln är p_0 och p_1. Så vi börjar med att rita upp kolumnerna och fylla i sanningsvärdena för satssymbolerna.

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1		1			1			1
1	0		1		0			1			0
0	1		0		1			0			1
0	0		0		0			0			0

Sedan undersöker vi vilka delformler som har sanningsvärdena för de direkta delformlerna definierade. De är konjunktionen och negationerna till höger. Vi fyller i deras sanningsvärden:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1		1	**1**	1		**0**	1		**0**	1
1	0		1	**0**	0		**0**	1		**1**	0
0	1		0	**0**	1		**1**	0		**0**	1
0	0		0	**0**	0		**1**	0		**1**	0

Nu kan vi fylla i negationen till vänster och disjunktionen:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	**0**	1	1	1		0	1	**0**	0	1
1	0	**1**	1	0	0		0	1	**1**	1	0
0	1	**1**	0	0	1		1	0	**1**	0	1
0	0	**1**	0	0	0		1	0	**1**	1	0

Sist fyller vi i ekvivalensen:

p_0	p_1	$(\neg$	$(p_0$	$\wedge$	$p_1)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_0	$\vee$	$\neg$	$p_1))$
1	1	0	1	1	1	**1**	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	**1**	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	**1**	1	0	1	1	0

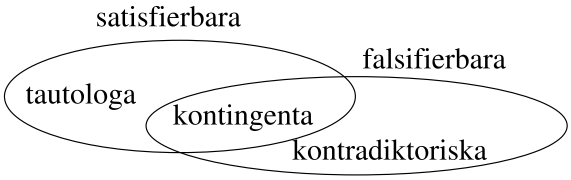
Vi märker att formeln $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ har sanningsvärdet 1 oberoende av värdering. En sådan formel kallas *tautologi* (från grekiskans "tauto", samma och "logos", ord/idé). I vardagsspråk används termen tautologi om uttryck som inte innehåller någon ny information eftersom de alltid är sanna, t.ex. "Jag kommer eller jag kommer inte". Inom logiken är tautologier ändå till nytta eftersom vi kan använda dem för att omforma information till mer hanterbar form. Två formler A och B är *satslogiskt ekvivalenta*, $A \Leftrightarrow B$, om $v(A) = v(B)$ för alla värderingar v. Ett annat sätt att uttrycka samma sak är att säga att formeln $A \leftrightarrow B$ är en tautologi. Vi kan alltså använda tautologier för att hitta ekvivalenta former för givna formler.

En formel är *satisfierbar* om det finns någon värdering som ger den sanningsvärdet 1. Alla tautologier är alltså satisfierbara, men det finns satisfierbara formler som inte är tautologier. Dessa är *kontingenta*, dvs. de är sanna enligt en del värderingar och falska enligt andra. Formler som är falska under åtminstone en värdering kallas *falsifierbara*. Bland de falsifierbara formlerna har vi specialfallet av formler som alltid är falska. De kallas *kontradiktoriska*. Figur 1 visar ett schema över de olika formelkategorierna.

Exempel 11. Tautologa och därmed satisfierbara satser:

> Det regnar eller det regnar inte.
> $p_0 \rightarrow p_0$.
> $A \vee \neg A$.

Kontingenta och därmed både satisfierbara och falsifierbara satser:



Figur 1: Schema över formelkategorier

Det regnar.
$p_0 \wedge p_1$

Kontradiktoriska och därmed falsifierbara satser:

Det stämmer inte att han är antingen trött eller lat, men trött är han.
$A \wedge \neg A$
$(((p_0 \rightarrow p_1) \wedge p_0) \wedge \neg p_1)$

Ur logisk synpunkt är en av de viktigaste egenskaperna en formel har av vilken kategori den är. Kategorin kan man utläsa ur formelns sanningsvärdetabell. Det är emellertid inte en särskilt effektiv metod. Med n satssymboler får vi 2^n rader i tabellen. Det innebär att tabellens längd växer exponentiellt med antalet satssymboler i formeln vilket begränsar användbarheten av metoden. Vi skall senare på kursen lära oss ett par mer behändiga metoder.

1.3 Sanningsfunktioner

Vi kan nu konstruera sanningsvärdetabeller för godtyckliga formler. En naturlig följdfråga är: Kan vi konstruera formler för godtyckliga sanningsvärdetabeller? Till exempel kan vi fråga: Finns det en formel A, uppbyggd av satssymbolerna p_0, p_1 och p_2, med följande sanningsvärdetabell:

p_0	p_1	p_2	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

För att bättre kunna studera frågan definierar vi begreppet *sanningsfunktion.*

Definition 12. En *sanningsfunktion* är en funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, där $n \in \mathbb{N}$.

Ett exempel på en sanningsfunktion är:

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sanningsfunktioner är generaliseringar av de vanliga konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$. Granskar vi tvåställiga sanningsfunktioner ser vi att det finns allt som allt $2^4 = 16$ av dem. De finns presenterade i följande tabell.

x	y				$\neg$					$\wedge$	$\leftrightarrow$		$\rightarrow$			$\vee$	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Vi känner enkelt igen konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ men ser att det också finns en hel mängd andra sanningsfunktioner. En del av dem motsvarar etablerade logiska grindar inom digitaltekniken, som t.ex. Sheffers streck (NAND):

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Varje satslogisk formel bestämmer en sanningsfunktion:

Definition 13. Om A är en formel som innehåller enbart satssymbolerna $p_0, \dots p_{n-1}$ så kan vi definiera den n-ställiga sanningsfunktionen för A, f_A, enligt

$$f_A(x_0, \dots, x_{n-1}) = v(A), \text{ där } v(p_i) = \begin{cases} x_i & \text{om } i < n \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vår ursprungliga fråga kan nu ställas som: Finns det för varje n-ställig sanningsfunktion f en formel A så att $f_A = f$? Det visar sig inte bara att detta stämmer utan att det finns ett mekaniskt sätt att konstruera formeln.

Lemma 14. *Om f är en n-ställig sanningsfunktion ($n \geq 1$) så finns det en satslogisk formel som innehåller bara satssymbolerna $p_0, \dots p_{n-1}$ och konnektiven $\neg$, $\wedge$ och $\vee$ och för vilken $f_A = f$.*

Bevis. Låt f vara en n-ställig sanningsfunktion, $n \geq 1$. Om f är den konstanta nollfunktionen (dvs. alltid får värdet 0) väljer vi t.ex. $A = p_0 \wedge \neg p_0$. Så vi kan anta att f får värdet 1 åtminstone för en n-tipel $(x_0, \dots x_{n-1})$. För varje n-tipel $\bar{x} = (x_0, \dots x_{n-1})$ definierar vi en formel

$$A_{\bar{x}} = (q_0 \wedge \dots q_{n-1}), \quad \text{där } q_i = \begin{cases} p_i & \text{om } x_i = 1 \\ \neg p_i & \text{om } x_i = 0. \end{cases}$$

Idén med $A_{\bar{x}}$ är att formeln har sanningsvärdet 1 för exakt de värderingar som ger satssymbolerna $p_0, \dots p_{n-1}$ sanningsvärdena i n-tipeln $\bar{x}$.

Låt $X = \{\bar{x} \in \{0,1\}^n \mid f(\bar{x}) = 1\}$. Eftersom vi antog att $f(\bar{x}) = 1$ för åtminstone en n-tipel $\bar{x}$, så är X inte tom och vi kan låta A vara disjunktionen av de $A_{\bar{x}}$ där $\bar{x} \in X$.

Det återstår att visa att $f_A = f$. Så låt $(d_0, \dots, d_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ och låt v vara sanningsfunktionen där

$$v(p_i) = \begin{cases} d_i & \text{om } i < n, \\ 1 & \text{annars,} \end{cases}$$

dvs. v är sanningsfunktionen från Definition 13 för vilken $f_A(d_0, \dots, d_{n-1}) = v(A)$.

Om nu $f_A(d_0, \dots, d_{n-1}) = 1$, dvs. $v(A) = 1$, så måste en av disjunkterna i A vara sann. Alltså är $v(A_{\bar{x}}) = 1$ för någon $\bar{x} \in X$. Men formlerna $A_{\bar{x}}$ är definierade så att den enda av dem som är sann under v är $A_{(d_0,\dots,d_{n-1})}$. Alltså måste vi ha $(d_0, \dots, d_{n-1}) \in X$ vilket på basen av hur X var definierad ger $f(d_0, \dots, d_{n-1}) = 1$.

Å andra sidan, om $f(d_0, \dots, d_{n-1}) = 1$ så är $(d_0, \dots, d_{n-1}) \in X$. Då är $A_{(d_0,\dots,d_{n-1})}$ en av disjunkterna i A. $A_{(d_0,\dots,d_{n-1})}$ är sann exakt för värderingar som ger p_i sanningsvärdet d_i, alltså är $v(A_{(d_0,\dots,d_{n-1})}) = 1$ och enligt disjunktionens sanningsdefinition $v(A) = 1$. Det här i sin tur innebär att $f_A(d_0, \dots, d_{n-1}) = 1$. □

Notera formen på formeln A ovan. A är en disjunktion där varje disjunkt är en konjunktion av satssymboler och negationer till sådana. Formen kallas *disjunktiv normalform* och förkortas ofta DNF. Vi har visat att varje sanningsfunktion motsvaras av en formel i disjunktiv normalform. Eftersom varje formel definierar en sanningsfunktion har vi visat att det för varje formel finns en ekvivalent formel i disjunktiv normalform. Den här är emellertid inte unik. Om vi mekaniskt enligt beviset ovan konstruerar den disjunktiva normalformen för

$$p_0 \to p_1$$

får vi formeln

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$$

men det finns en ekvivalent mycket enklare formel

$$\neg p_0 \vee p_1$$

som också är i disjunktiv normalform. Notera att vi i normalformen godkänner disjunktioner och konjunktioner med bara en disjunkt eller konjunkt. Således är formlerna

$$\begin{gathered} p_0 \\ p_0 \wedge p_1 \quad \text{och} \\ p_0 \vee p_1 \end{gathered}$$

alla i disjunktiv normalform.

Lemma 14 visar att varje konnektiv kan *definieras* med konnektiven $\neg$, $\wedge$ och $\vee$, dvs. varje konnektiv kan uttryckas med hjälp av en kombination av de här konnektiven. En konnektivmängd som kan definiera alla sanningsfunktioner kallas *fullständig*. Vi har sett att $\{\neg, \wedge, \vee\}$ är fullständig. Vi kan enkelt observera att $\vee$ kan definieras med $\neg$ och $\wedge$:

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Således kan vi induktivt byta ut alla disjunktioner i en formel i disjunktiv normalform och visa att redan mängden $\{\neg, \wedge\}$ är fullständig. Vi kan t.o.m. hitta fullständiga konnektivmängder med bara ett konnektiv. Ett sådant exempel är Sheffers streck som vi stötte på tidigare. Fullständigheten av $\{|\}$ lämnas som övningsuppgift.

1.4 Naturlig deduktion

Med sanningstabeller (eller andra semantiska metoder) kan vi visa att en given slutsats stämmer. T.ex. är slutledningen

> Om det regnar eller snöar så blir skorna blöta.
> Skorna är inte blöta.
> Alltså snöar det inte.

riktig eftersom formeln $(((p_0 \vee p_1) \to p_2) \wedge \neg p_2) \to \neg p_1$ är en tautologi. Vi säger att en formel B är en *satslogisk konsekvens* av A, $A \Rightarrow B$ om $A \to B$ är en tautologi eller, ekvivalent uttryckt, om varje värdering som gör A sann också nödvändigtvis gör B sann.

Med semantiska metoder kan vi kontrollera att en given formel är en tautologi. Ett annat angreppsätt är ett *syntaktiskt bevis* där vi härleder formler från givna formler. En *härledning*, också kallad *deduktion* eller *formellt bevis*, är generellt sett en följd av formler konstruerad enligt specifika regler. Styrkan i formella bevismetoder är att de gör bevisen mekaniskt verifierbara. De ger också metoder att studera begränsningarna i bevisföring.

Den härledning vi här presenterar kallas naturlig deduktion. "Naturlig" betyder här att den försöker imitera det sett vi vanligtvis resonerar. Den är emellertid långt mer pedantisk än de informella bevis en matematiker använder sig av till vardags. Den naturliga deduktionen bygger på introduktions- och elimineringsregler för konnektiven. Det finns andra härledningssystem med andra regler, t.ex. Hilberts system som bygger på färre regler men där härledningarna är mindre intuitiva.

Ett enkelt exempel på en deduktionsregel är: Bevisen är uppbyggda så att varje vågrätt streck är ett steg i härledningen, premisserna står ovanför strecket och slutsatsen nedan. Höger om strecket anges vilken deduktionregel som använts. "$\wedge$ I" innebär introduktion av konjunktion och det vårt bevis ovan säger är att om A och B är sanna, så är $A \wedge B$ det också. Genom att upprepa deduktionssteget kan vi härleda t.ex. $(A \wedge B) \wedge (B \wedge A)$ från premisserna A och B:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{B \quad A}{B \wedge A}\,\wedge\mathrm{I}}{(A \wedge B) \wedge (B \wedge A)}\,\wedge\mathrm{I}$$

I Tabell 2 finns deduktionsreglerna sammanställda. Reglerna är valda så att de bibehåller sanningen i formlerna under alla värderingar. Genom att kombinera dem och använda slutsatserna i tidigare deduktioner som premisser i följande steg kan vi bygga upp träd av deduktionssteg. De här är våra deduktioner. Om det finns en härledning av formeln B från premisserna $A_0, \ldots A_{n-1}$, skriver vi $\{A_0 \ldots A_{n-1}\} \vdash B$. Ifall mängden premisser är tom skriver vi kort $\vdash B$.

Då vi använder reglerna $\vee$ E, $\to$ I, $\leftrightarrow$ I och $\neg$ I får vi stryka premisser, vilket vi indikerar med att sätta klammer runt premisserna. Samtidigt markerar vi när vi strukit dem genom att markera klamrarna och regeln med samma nummer. Möjligheten att stryka premisser innebär att vi kan göra tillfälliga antaganden som sedan stryks från den slutliga deduktionen. Vi illustrerar dethär med regeln $\vee$ E:

Exempel 15. Vi visar att $\{A \vee B, A \to C, B \to C\} \vdash C$. Vi kan tänka oss att härledningen fortlöper som ett bevis med två fall: antingen är A sann eller så är B sann. Så anta för ett ögonblick att A är sann. Då kan vi anta A och $A \to C$ (eftersom den senare hör till premisserna) och deducera:

$$\dfrac{A \to C \qquad A}{C}\,\to\mathrm{E}$$

Konnektiv	Introduktion	Elimination
Konjunktion	$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\wedge\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\,\wedge\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge\,\mathrm{E}$
Disjunktion	$\dfrac{A}{A \vee B}\,\vee\,\mathrm{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\,\vee\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,\vee\,\mathrm{E}$
Implikation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,\to\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \to B \qquad A}{B}\,\to\,\mathrm{E}$
Ekvivalens	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B}\,\leftrightarrow\,\mathrm{I}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B}\,\leftrightarrow\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A}\,\leftrightarrow\,\mathrm{E}$
Negation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\,\mathrm{I}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,\neg\,\mathrm{E}$

Tabell 2: Satslogikens deduktionsregler

Å andra sidan om B är sann, kan vi deducera

$$\dfrac{B \to C \qquad B}{C}\,\to\,\mathrm{E}$$

Nu vet vi inte om A eller B är sann men enligt premisserna är $A \vee B$ sann, så någondera måste vara det, och i vilket fall som helst måste C vara sann på basen av deduktionerna ovan. Vi behöver alltså inte veta vilkendera som är sann (utan kan stryka A och B) bara vi vet att $A \vee B$ stämmer. Således får vi deduktionen:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{A \to C \qquad [A]^1}{C}\,\to\,\mathrm{E} \qquad \dfrac{B \to C \qquad [B]^1}{C}\,\to\,\mathrm{E}}{C}\,\vee\,\mathrm{E},\,1$$

Reglerna $\vee$ E, $\to$ I, $\leftrightarrow$ I och $\neg$ I *tillåter* att vi stryker premisser men de *förutsätter* det inte. Vi kan därför använda reglerna i förkortad form i fall där det inte finns något att stryka:

$$\dfrac{B}{A \to B}\,\to\,\mathrm{I}$$

Märk väl att eftersom naturlig deduktion är en syntaktisk och inte en semantisk bevismetod, så får vi inte ändra syntaxen i våra premisser. Således kan vi behöva bevis av intuitivt triviala påståenden, som t.ex. $\{A \wedge B\} \vdash B \wedge A$. Regeln $\neg$ I förutsätter också att kontradiktionen är av formen $B \wedge \neg B$, exempelvis $\neg B \wedge B$ duger inte (men nog $\neg B \wedge \neg\neg B$).

Vi illustrerar användningen av naturlig deduktion med att härleda följande delar av de Morgans lagar:

Exempel 16. Vi visar $\{\neg A \vee \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$.

$$
\dfrac{\neg A \lor \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]^1}{A}\,{\scriptstyle \land \mathrm{E}} \qquad [\neg A]^3}{A \land \neg A}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg(A \land B)}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I},\, 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land B]^2}{B}\,{\scriptstyle \land \mathrm{E}} \qquad [\neg B]^3}{B \land \neg B}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg(A \land B)}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I},\, 2}}{\neg(A \land B)}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{E},\, 3}
$$

Exempel 17. Vi visar $\{\neg(A \land B)\} \vdash \neg A \lor \neg B$.

Idén i det här beviset är följande: Vi märker att om vi antar både A och B så kan vi via motsägelsebevis ($\neg I$) härleda $\neg A$ och samtidigt stryka A. Därifrån är det lätt att nå $\neg A \lor \neg B$. Men B får vi inte struket. Å andra sidan kan vi från $\neg B$ enkelt härleda $\neg A \lor \neg B$. Man skulle ju tycka att $B \lor \neg B$ stämmer, så vi antar att vi har en härledning $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \lor \neg B\end{array}$ och deducerar:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \lor \neg B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [B]^2}{A \land B}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}} \qquad \neg(A \land B)}{(A \land B) \land \neg(A \land B)}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I},\, 1}}{\neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}}} {} \qquad \dfrac{[\neg B]^2}{\neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}}}{\neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{E},\, 2}
$$

Nu återstår bara att visa att $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ B \lor \neg B\end{array}$ finns. Den ser ut så här:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1}{B \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}} \qquad [\neg(B \lor \neg B)]^2}{(B \lor \neg B) \land \neg(B \lor \neg B)}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg B}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I},\, 1}}{B \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor \mathrm{I}} \qquad [\neg(B \lor \neg B)]^2}{(B \lor \neg B) \land \neg(B \lor \neg B)}\,{\scriptstyle \land \mathrm{I}}}{\neg\neg(B \lor \neg B)}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{I},\, 2}}{B \lor \neg B}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{E}}}{}
$$

Lägg märke till att vi vid den andra elimineringen får eliminera *alla* förekomster av $\neg(B \lor \neg B)$ i härledningen.

Vi har nu huvuddelarna i ett bevis av den ena av de Morgans lagar. Vi sammanställer dem:

Exempel 18. Visa att $\vdash \neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$.

Vi betecknar med $\begin{array}{c}\neg(A \land B)\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \lor \neg B\end{array}$ härledningen i Exempel 17 och med $\begin{array}{c}\neg A \lor \neg B\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \land B)\end{array}$ härledningen i Exempel 16. Då har vi

$$
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(A \land B)]^1\\ \mathcal{Q}\\ \neg A \lor \neg B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A \lor \neg B]^1\\ \mathcal{R}\\ \neg(A \land B)\end{array}}{\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)}\,{\scriptstyle \leftrightarrow \mathrm{I},\, 1}
$$

Vi har sett hur naturlig deduktion ser ut i praktiken. För att matematiskt exakt kunna bevisa något om den behöver vi en formell definition.

Definition 19. Mängden av deduktioner $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ definieras enligt följande:

1. Den triviala deduktionen A (där A är en satslogisk formel) är en deduktion. I det här fallet är $\mathcal{P} = \emptyset$ och A är samtidigt både premiss och slutsats.

2. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ och $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$ en deduktion.

3. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ och $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ deduktioner.

4. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{A \vee B}$ och $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{B \vee A}$ deduktioner.

5. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array}$, $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}$ och $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{R}\\ C\end{array}$ är deduktioner så är

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{R}\\ A \vee B & C & C\end{array}}{C}$$

en deduktion

6. Om $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}}{A \to B}$ en deduktion.

7. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \to B\end{array}$ och $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A \to B & A\end{array}}{B}$ en deduktion.

8. Om $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ och $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{Q}\\ A\end{array}$ är deduktioner så är $\dfrac{\begin{array}{cc}[A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ B & A\end{array}}{A \leftrightarrow B}$ en deduktion.

9. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \leftrightarrow B\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ och $\begin{array}{c}\mathcal{R}\\ B\end{array}$ är deduktioner så är

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A \leftrightarrow B & A\end{array}}{B} \text{ och } \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{R}\\ A \leftrightarrow B & B\end{array}}{A}$$

deduktioner.

10. Om $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$ en deduktion.

11. Om $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}$ är en deduktion så är $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}$ en deduktion.

1.5 Sundhet och fullständighet

Att den naturliga deduktionen är *sund* innebär att varje formel som kan nås med naturlig deduktion från en mängd premisser är en satslogisk konsekvens av premisserna. Vi kan alltså inte konstruera en härledning vars slutsatser inte skulle stämma.

Teorem 20 (Satslogikens sundhetsteorem)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \vdash A$ så $\mathcal{S} \Rightarrow A$.*

Bevis. Vi bevisar med induktion över strukturen av en härledning i naturlig deduktion att ifall $\mathcal{P}$ är en härledning, vars premisser finns i $\mathcal{S}$ och vars slutsats är A så stämmer $\mathcal{S} \Rightarrow A$, dvs. varje värdering v som satisfierar $\mathcal{S}$ satisfierar också A.

1. Om $\mathcal{P}$ är den triviala deduktionen A så är A en premiss. Alltså måste varje värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ satisfiera A.

2. Antag som induktionshypotes att deduktionerna $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ och $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}}{A \wedge B}$ och låt v vara en värdering som satisfierar alla premisser till $\mathcal{R}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ så enligt induktionshypotesen har vi $v(A) = 1$ och $v(B) = 1$. Enligt sanningsdefinitionen för $\wedge$ har vi då $v(A \wedge B) = 1$ så $\mathcal{R}$ är sund.

3. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen är $v(A \wedge B) = 1$. Men härav följer $v(A) = 1$, så $\mathcal{Q}$ är sund. På motsvarande sätt ser vi att $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ är sund.

4. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{A \vee B}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. Då satisfierar v premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen är $v(A) = 1$. Då är också $v(A \vee B) = 1$ så $\mathcal{Q}$ är sund. På motsvarande sätt ser vi att $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{B \vee A}$ är sund.

5. Antag att deduktionerna $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array}$, $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}$ och $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{array}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array}\quad\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}\quad\begin{array}{c}[B]\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{array}}{C}$$

och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{R}$. Eftersom v då satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ är $v(A \vee B) = 1$ enligt induktionshypotesen. Vi har då två möjligheter: antingen är $v(A) = 1$ eller så är $v(A) = 0$. Om $v(A) = 1$ så satisfierar v premisserna till $\mathcal{Q}$ eftersom den i varje fall satisfierar alla de övriga premisserna till $\mathcal{Q}$ än A. Enligt induktionshypotesen har vi då $v(C) = 1$. Å andra sidan om $v(A) = 0$ så måste $v(B) = 1$ eftersom $v(A \vee B) = 1$. I så fall satisfierar v premisserna till $\mathcal{Q}'$ och enligt induktionshypotesen är då $v(C) = 1$.

6.–9. Fallen med implikation och ekvivalens lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

10. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. v satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ så $v(\neg\neg A) = 1$. Men då är $v(A) = 1$.

11. Antag att deduktionen $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}$ är sund. Låt $\mathcal{Q}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}$ och låt v vara en värdering som satisfierar premisserna till $\mathcal{Q}$. Om v nu skulle satisfiera A, skulle den satisfiera premisserna till $\mathcal{P}$. Men då skulle $v(B \wedge \neg B) = 1$ vilket är omöjligt eftersom ingen värdering kan satisfiera en kontradiktion. Därför måste $v(A)$ vara 0 och således är $v(\neg A) = 1$.

□

Sundhetsteoremet har följande omedelbara korollarium:

Korollarium 21. *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \not\Rightarrow A$ så $\mathcal{S} \nvdash A$.*

När vi skall visa att något går att härleda kan vi konstruera en härledning. Sundhetssatsen ger oss verktyg att bevisa när något *inte* går att härleda.

Exempel 22. Vi visar att $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \nvdash p_2$. Enligt Korollarium 21 räcker det att bevisa att $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\} \not\Rightarrow p_2$. För det här räcker det att hitta en värdering som satisfierar $\{(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2, p_0\}$ men inte p_2.

Låt v vara värderingen

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{om } i = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Nu är $v(p_0 \leftrightarrow p_1) = 0 = v(p_2)$ så $v((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2) = v(p_0) = 1$ men $v(p_2) = 0$.

Vi ger som följande en skiss över satslogikens fullständighetsteorem enligt vilket alla satslogiska konsekvenser kan härledas. Många detaljer lämnas åt läsaren. För ett noggrannare bevis hänvisas till [2] eller kursen "Matemaattinen logiikka".

Definition 23. En formelmängd $\mathcal{S}$ är *satslogiskt inkonsistent* om det finns en formel A så att $\mathcal{S} \vdash A \wedge \neg A$. I motsatt fall är $\mathcal{S}$ *satslogiskt konsistent.*

Lemma 24. *Följande villkor är ekvivalenta:*

1. *S är inkonsistent.*
2. *Det finns en formel A så att $\mathcal{S} \vdash A$ och $\mathcal{S} \vdash \neg A$.*
3. *För alla formler A stämmer $\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren. □

Lemma 25. *Om $\mathcal{S}$ är en formelmängd och A en satslogisk formel så är följande villkor ekvivalenta:*

1. *$\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ är inkonsistent.*
2. *$\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren. □

Definition 26. Formelmängden $\mathcal{S}$ är *maximalkonsistent* om den är konsistent och varje $\mathcal{S}' \supsetneq \mathcal{S}$ är inkonsistent.

Lemma 27 (Lindenbaums lemma)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en konsistent formelmängd så har $\mathcal{S}$ en maximalkonsistent extension.*

Bevis. (*Skiss*) Idén i beviset går ut på att induktivt bygga upp extensionen. Mängden av satslogiska formler är numrerbar så vi kan anta att alla satslogiska formler finns uppräknade i mängden $\{A_0, A_1, \dots\}$. Vi börjar från $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$. Sedan går vi igenom alla formler och definierar

$$\mathcal{S}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} & \text{om } \mathcal{S}_n \cup \{A_n\} \text{ är konsistent,} \\ \mathcal{S}_n & \text{annars.} \end{cases}$$

Sedan bevisar vi att

- varje $\mathcal{S}_n$ är konsistent,
- mängden $\mathcal{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ är konsistent,
- mängden $\mathcal{S}'$ är maximalkonsistent och $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S}$.

□

Teorem 28 (Satslogikens fullständighetsteorem)**.** *Om $\mathcal{S}$ är en mängd satslogiska formler och $\mathcal{S} \Rightarrow A$ så $\mathcal{S} \vdash A$.*

Bevis. (*Skiss*) Antag att $\mathcal{S} \nvdash A$. Enligt Lemma 25 är $\mathcal{S} \cup \{\neg A\}$ konsistent så enligt Lindenbaums lemma finns det en maximalkonsistent mängd $\mathcal{S}' \supseteq \mathcal{S} \cup \{\neg A\}$. Definiera en värdering v så att $v(p_i) = 1$ om och endast om $p_i \in \mathcal{S}'$.

Bevisa sedan med strukturell induktion att $v(B) = 1$ om och endast om $B \in \mathcal{S}'$. Men då är $v(B) = 1$ för alla $B \in \mathcal{S}$ men $v(A) = 0$ (eftersom $v(\neg A) = 1$, så $\mathcal{S} \not\Rightarrow A$. □

Genom att kombinera sundhets- och fullständighetssatserna har vi nu:

Korollarium 29. *$\mathcal{S} \vdash A$ om och endast om $\mathcal{S} \Rightarrow A$.*

1.6 Semantiska träd

Betrakta följande exempel

Exempel 30. Vi undersöker om formeln $(p_0 \wedge ((p_0 \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3))))$ är satisfierbar.

Vi kan alltid konstruera sanningsvärdetabellen för formeln men med fyra satssymboler blir den obehändigt stor. Istället lönar det sig att se på delformlerna och vilka krav de ställer på en värdering som skulle göra formeln sann. Genom att bit för bit bryta ner konjunktionerna ser vi att varje värdering v som satisfierar formeln också måste uppfylla

$$v(p_0) = v(p_0 \to p_1) = v(p_1 \to p_2) = v(p_2 \to p_3) = v(\neg p_3) = 1$$

Eftersom $v(p_0) = 1$ och $v(p_0 \to p_1) = 1$, måste $v(p_1) = 1$. På samma sätt ser vi att $v(p_2) = 1$ och vidare att $v(p_3) = 1$. Samtidigt har vi kravet att $v(\neg p_3) = 1$ vilket är omöjligt. Formeln är alltså inte satisfierbar.

Resonemanget ovan kan generaliseras till en systematisk metod, kallad trädmetoden eller tablåmetoden. I den undersöker vi med hjälp av ett *semantiskt träd* vilka delformler som måste vara sanna för att formeln skall vara sann. Antag att vi vill avgöra om formeln $A = p_1 \wedge (p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1))$ är satisfierbar. Vi konstruerar då ett semantiskt träd med formeln A överst och "bryter ner" formeln ett konnektiv i taget, tills bara literaler (satssymboler eller negerade satssymboler) återstår. Nedbrytningsreglerna återspeglar sanningskraven för en sammansatt formel: måste endera eller båda delformlerna vara sanna för att formeln skall vara sann?

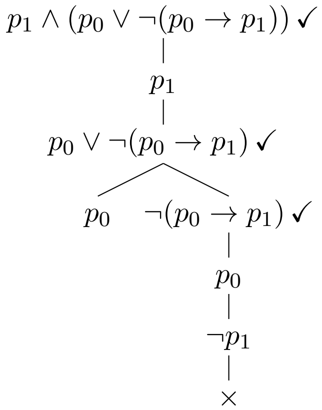
Formeln A är en konjunktion så för att den skall vara sann måste båda delformlerna p_1 och $(p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1))$ vara sanna.

$$\begin{array}{c} p_1 \wedge (p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1)) \checkmark \\ | \\ p_1 \\ | \\ p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1) \end{array}$$

An eftersom formlerna bryts ner markerar vi dem med $\checkmark$. I nästa steg ser vi att $p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1)$ är en disjunktion. För att den skall vara sann måste endera disjunkten vara sann. Trädet förgrenar sig:

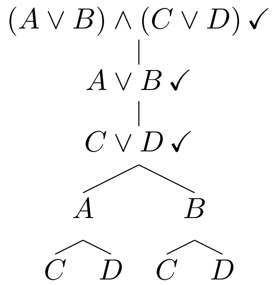
$$\begin{array}{c} p_1 \wedge (p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1)) \checkmark \\ | \\ p_1 \\ | \\ p_0 \vee \neg(p_0 \to p_1) \checkmark \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_0 \qquad \neg(p_0 \to p_1) \end{array}$$

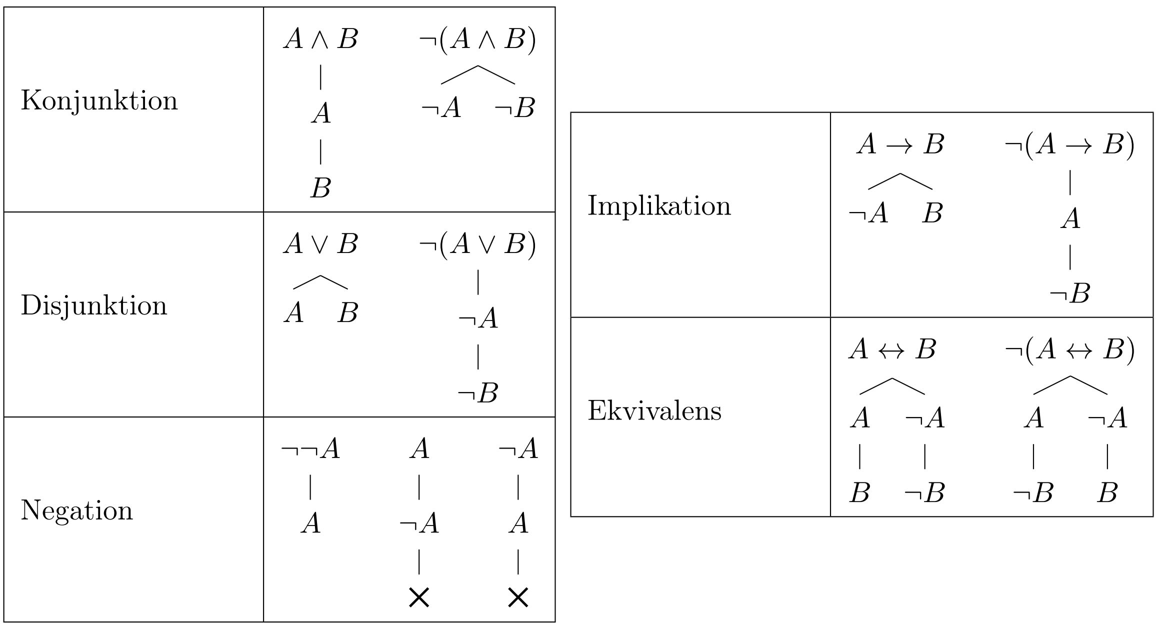
I nästa steg bryter vi ner formeln $\neg(p_0 \to p_1)$. Den är en negation av en implikation. Den stämmer om förledet är sant och efterledet falskt.



När alla formler som inte är literaler är markerade med ✓ är trädet färdigt. Om någon gren innehåller både en formel och dess negation markeras detta med ett kryss i slutet på grenen. Grenen kallas då *sluten*. De övriga grenarna är *öppna*. Varje öppen gren ger upphov till en värdering som gör alla formler på grenen sanna, inklusive den översta. Vi ser alltså från trädet ovan att värderingar som uppfyller $v(p_0) = v(p_1) = 1$ satisfierar A.

Nedbrytningsreglerna för semantiska träd finns sammanställda i Tabell 3. Då ett träd förgrenar sig skall reglerna tillämpas på alla öppna grenar under formeln. Således ger formeln $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ upphov till ett träd med fyra grenar:





Tabell 3: Nedbrytningsreglerna för semantiska träd

Ett semantiskt träd där en formel A förekommer överst (i "roten") kallas ett *semantiskt träd för* A. Ett semantiskt träd är alltså ett sätt att finna värderingar som satisfierar A. Om alla grenar i ett träd är slutna kallar vi trädet *slutet*. Formeln överst i trädet är då inte satisfierbar. Vi kan använda det här för att visa att en formel är en tautologi. Nämligen, om $\neg A$ inte är satisfierbar så måste A vara tautolog. Ett slutet träd för formeln $\neg A$ kallas ett semantiskt bevis för A. Semantiska bevis baserar sig på följande teorem (vars bevis finns t.ex. i [2])

Teorem 31. *En satslogisk formel har ett semantiskt bevis om och endast om den är tautolog.*

Exempel 32. Vi visar att $(A \to B) \vee (B \to A)$ är en tautologi. Vi konstruerar ett semantiskt träd för *negationen* av formeln:

$$\begin{array}{c}
\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \checkmark \\
| \\
\neg(A \to B) \checkmark \\
| \\
\neg(B \to A) \checkmark \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
| \\
B \\
| \\
\neg A \\
| \\
\times
\end{array}$$

Eftersom trädet är slutet kan ingen värdering satisfiera $\neg((A \to B) \vee (B \to A))$ så $(A \to B) \vee (B \to A)$ måste vara en tautologi.

Exempel 33. Vi återvänder till exemplet i början av avsnittet och visar med ett semantiskt träd att formeln $(p_0 \wedge ((p_0 \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_2) \wedge ((p_2 \to p_3) \wedge \neg p_3))))$ inte är satisfierbar.

Vi börjar med att bryta ner konjunktionerna en efter en. Sedan bryter vi ner implikationerna. Då vi på en gren får både en formel och dess negation kan vi sluta den (markera med $\times$) och behöver efter det inte tillämpa fler regler på den grenen. (Vi får naturligtvis tillämpa reglerna först och se efter vilka grenar som sluter sig först efteråt, men genom att sluta grenar an efter kan vi förenkla trädet avsevärt.)

$$p_0 \land ((p_0 \to p_1) \land ((p_1 \to p_2) \land ((p_2 \to p_3) \land \neg p_3))) \checkmark$$

$$|$$

$$p_0$$

$$|$$

$$(p_0 \to p_1) \land ((p_1 \to p_2) \land ((p_2 \to p_3) \land \neg p_3)) \checkmark$$

$$|$$

$$p_0 \to p_1 \checkmark$$

$$|$$

$$(p_1 \to p_2) \land ((p_2 \to p_3) \land \neg p_3) \checkmark$$

$$|$$

$$p_1 \to p_2 \checkmark$$

$$|$$

$$(p_2 \to p_3) \land \neg p_3 \checkmark$$

$$|$$

$$p_2 \to p_3 \checkmark$$

$$|$$

$$\neg p_3$$

$$\begin{array}{cc} \neg p_0 & p_1 \\ | & \begin{array}{cc} \neg p_1 & p_2 \\ | & \begin{array}{cc} \neg p_2 & p_3 \\ | & | \\ \times & \times \end{array} \\ \times & \end{array} \\ \times & \end{array}$$

Alla grenar sluter sig, så formeln är inte satisfierbar.

2 Predikatlogik

Betrakta följande slutledning:

Alla katter är svarta.
Knutte är en katt.
―――――――――――――
Alltså är Knutte svart.

Slutledningen är uppenbarligen giltig. Men om vi försöker formalisera den i satslogik får vi slutledningen

$$\frac{\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \end{array}}{p_2}$$

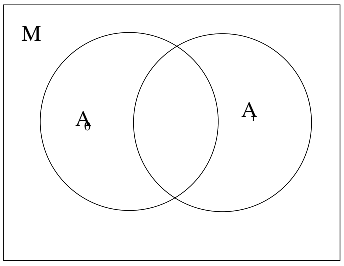
Den här slutledningen är inte satslogiskt giltig, eftersom $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$ inte är en tautologi. Problemet är att satslogiken bara "ser" satser, inte objekten som satserna talar om.

Predikatlogiken ger oss en möjlighet att tala om objekt. Det gör vi med *variabler*. Då satslogiken tolkas genom att ge ett sanningsvärde åt de atomära satserna går predikatlogikens semantik ut på att ge en identitet åt variablerna. Vad menar vi med variabeln x? Olika saker i olika fall, men det gemensamma för alla tolkningar är att de görs inom en *modell*.

2.1 Modeller

En modell är en mängd med någon form av struktur. Vi börjar med några exempel innan vi ger den formella definitionen.

En av de enklaste formerna av modeller bygger på enställiga *predikat*. Då består en modell $\mathcal{M}$ av en icke-tom *domän* M samt delmängder till M, kallade *predikat*. Predikaten kan vi beteckna $A_0, A_1, \ldots$. Ett predikat delar upp domänen i två delar: predikatet och dess komplement, två predikat delar upp domänen i fyra delar osv.



Figur 2: En modell med två enställiga predikat

Exempel 34. Med enställiga predikat kan vi granska samlingar av objekt med olika egenskaper. Låt t.ex. domänen M vara en samling träklot. A_0 består av de betsade kloten, A_1 av de lackade. Nu kan vår modell skilja på betsade/obetsade och lackade/olackade klot:

$A_0 \cap A_1$ består av betsade lackade klot.
$(M \backslash A_0) \cap A_1$ består av obetsade lackade klot.
$A_0 \cap (M \backslash A_1)$ består av betsade olackade klot.
$(M \backslash A_0) \cap (M \backslash A_1)$ består av obetsade olackade klot.

Beroende på vår samling klot kan en del (men inte alla) av mängderna ovan vara tomma.

Flerställiga predikat kallas oftast relationer. Speciellt vanliga inom matematiken är tvåställiga relationer. De består av par av element från en given domän.

Exempel 35. Linjära ordningar är tvåställiga relationer som uppfyller kraven:

1. (Reflexivitet) $a \leq a$ för alla a,
2. (Antisymmetri) om $a \leq b$ och $b \leq a$ så är $a = b$,
3. (Transitivitet) om $a \leq b$ och $b \leq c$ så är $a \leq c$,
4. (Totalitet) för alla a och b gäller antingen $a \leq b$ eller $b \leq a$.

Nu bildar t.ex. de naturliga talen (med sin vanliga ordning) en modell. Domänen är då mängden $\mathbb{N}$ och relationen $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$.

Exempel 36. En *graf* är består av en samling noder (eller hörn) med bågar (eller kanter) mellan dem. Ett exempel på två grafer ses i Figur 3. Då vi granskar en graf som en modell består domänen av noderna och relationen utgörs av de nodpar mellan vilka det finns en båge.

Figur 3: Två grafer

Grafer används för att studera olika sorters nätverk (telekommunikation, vägar), språkliga strukturer inom lingvistiken, molekylmodeller inom kemin, osv.

Exempel 37. Vi kan också uttrycka vardagliga fenomen med modeller. Låt domänen M vara mängden av alla människor. Vi kan då definiera relationer som

$$\begin{aligned} Syskon &= \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ och } y \text{ är syskon}\} \\ Far &= \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ är far till } y\} \\ Mor &= \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ är mor till } y\} \end{aligned}$$

Vi kan också ha funktioner och konstanter i våra modeller. Exempel på modeller inkluderar således t.ex. strukturer som grupper, ringar och kroppar från algebran.

Vilken form av struktur modellen har bestäms av modellens *lexikon* (eller vokabulär). Ett lexikon består av

- predikatsymboler (en- eller flerställiga) $P_0, P_1, \ldots$ eller $R_0, R_1, \ldots$
- funktionssymboler $f_o, f_1, \ldots$
- konstantsymboler $c_0, c_1, \ldots$

Vi koncentrerar oss för tillfället på modeller med bara en- och tvåställiga predikat samt konstanter. I praktiken använder vi ofta andra namn som predikat- och konstantsymboler.

Nu kan vi ge en formell definition av en modell:

Definition 38. En *modell* $\mathcal{M}$ för ett lexikon L består av

- en icke-tom mängd M kallad modellens *domän*, betecknas även $\text{dom}(\mathcal{M})$
- ett enställigt predikat $P^{\mathcal{M}} \subset M$ för varje enställig predikatsymbol $P \in L$

- ett n-ställigt predikat $R^{\mathcal{M}} \subset M^n$ för varje n-ställig predikatsymbol $R \in L$
- ett element $c^{\mathcal{M}} \in M$ för varje konstantsymbol $c \in L$
- en n-ställig funktion $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ för varje n-ställig funktionssymbol $f \in L$

Mängden $P^{\mathcal{M}} \in M$ kallas *tolkningen* av symbolen P i $\mathcal{M}$. Olika modeller för samma lexikon har samma symboler (t.ex. P, R) men olika tolkningar för dem. Modeller skrivs ofta ut som följder bestående av domänen och tolkningarna för de olika symbolerna i lexikonet.

Lexikon	Modell
P	$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}})$
P_0, P_1, R_0, c_0	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}})$
P_0, R_0, f_0, c_0, c_1	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, f_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$
osv.	

2.2 Formler och sanningsvillkor

Jämfört med satslogikens formler har predikatlogiken två viktiga särdrag. Dels använder vi i sammansatta formler förutom de bekanta konnektiven $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ också *kvantifikatorerna* $\forall x$ (allkvantifikator, för alla x) och $\exists x$ (existenskvantifikator, för något x). Dels har vi i de atomära formlerna långt större uttrycksmöjligheter än vad satslogikens satssymboler erbjuder. Exakt hur våra atomära formler ser ut beror på vårt lexikon.

Som förut gäller det att hålla isär syntaxen (hur formlerna ser ut) och semantiken (vad de betyder). Formler är syntaktiska enheter, teckensträngar med en bestämd struktur. De symboler vi använder kan delas in i två grupper: logiska symboler och icke-logiska symboler. De logiska symbolerna är gemensamma för alla predikatlogiska språk och tolkas alltid på samma sätt. De icke-logiska symbolerna består av symbolerna i det aktuella lexikonet.

Logiska symboler
Variabler: $x_0, x_1, x_2, \dots$ (i praktiken ofta $x, y, z, \dots$)
Parenteser: (,)
Konnektiv: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Kvantifikatorsymboler: $\forall, \exists$
Identitetstecken: $=$

Icke-logiska symboler (Symbolerna i lexikonet L)
Konstantsymboler: $c_0, c_1, c_2, \dots$
Predikatsymboler: $R_0, R_1, R_2, \dots$ (i praktiken ofta också $P_1, P_2, \dots$)
Funktionssymboler: $f_0, f_1, f_2, \dots$

Predikatlogikens atomära formler uttrycker egenskaper och förhållanden såsom

- x är lackad
- $x = y$
- $x < 10$
- $R_0(x, c)$

De entiteter som formlerna "talar om" kallas *termer* (x, y, 10 och c ovan). Så länge lexikonet inte innehåller funktionssymboler utgörs termerna av variabler och konstantsymboler.

Definition 39. Låt L vara ett lexikon. De *atomära L-formlerna* bestäms enligt följande:

1. Om t och u är termer så är $t = u$ en atomär L-formel.
2. Om $R_i \in L$ är en n-ställig predikatsymbol och $t_0, \dots t_{n-1}$ är termer så är $R_i(t_0, \dots, t_{n-1})$ en atomär L-formel.

Definitionen ovan gäller också ifall lexikonet har funktionssymboler men termerna kan då vara mer komplexa än enbart variabler och konstantsymboler.

Innan vi går vidare till sammansatta formler skall vi ta oss en titt på de atomära formlernas semantik. Om vi granskar modellen i Exempel 34 känns det naturligt att vi behöver ett lexikon med två symboler för enställiga predikat $L = \{P_0, P_1\}$. Det känns också naturligt att tolkningarna av P_0 och P_1 skall vara predikaten A_0 och A_1. Men hur skall vi tolka ett uttryck av formen

$$P_0(x)\,?$$

Vad är x? Det är här vi ser skillnaden på variabler och konstanter. Så länge vi håller oss till atomära formler är det ingen skillnad på hur vi syntaktiskt behandlar konstantsymboler och variabler. Bägge används likadant i atomära formler. Men då vi skall tolka formlerna har konstantsymbolerna ett fast värde medan variablernas värde varierar. Det som avgör hur variablerna tolkas är en *tolkning*. Om L är ett lexikon och $\mathcal{M}$ en L-struktur, dvs. en modell för lexikonet L, med domän M så är en *$\mathcal{M}$-tolkning* en funktion $s : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to M$.

Exempel 40. Låt $L = \{R, c\}$. Granska L-strukturen $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <, 0)$. Dess domän utgörs av heltalen $\mathbb{Z}$ och tolkningarna för lexikonets symboler är

$$R^{\mathcal{M}} =<= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a < b\}$$
$$c^{\mathcal{M}} = 0$$

Vi kan nu granska värdena för variablerna x_0, x_1 och x_2 under olika tolkningar.

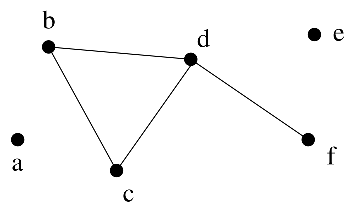
- $s_0(x_0) = 2$, $s_0(x_1) = 7$, $s_0(x_2) = 2$,
- $s_1(x_0) = 3$, $s_1(x_1) = 0$, $s_1(x_2) = 1$,

Vi ser bland annat att $s_0(x_0) = s_0(x_2)$ och $s_1(x_1) = c^{\mathcal{M}}$. Vi säger att s_0 satisfierar formeln $x_0 = x_2$ och s_1 satisfierar formeln $x_1 = c$.

Definition 41. Låt L vara ett lexikon utan funktionssymboler och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning. Då t är en term betecknas termens t värde under tolkningen s med $s(t)$. Om t är en variabel x_i är $s(t) = s(x_i)$. Om t är en konstantsymbol c är $s(t) = c^{\mathcal{M}}$. Atomära formler satisfieras nu enligt följande:

1. Om t och u är termer är formeln $t = u$ sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om $s(t) = s(u)$.
2. Om $t_1, \dots t_n$ är termer och R_i är en n-ställig predikatsymbol så är formeln $R_i(t_1, \dots t_n)$ sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om $(s(t_1), \dots s(t_n)) \in R_i^{\mathcal{M}}$.

Exempel 42. Låt $\mathcal{G}$ vara grafen i Figur 4. Grafen är en modell för lexikonet $\{E\}$ där E är



Figur 4: En graf $\mathcal{G}$

en tvåställig predikatsymbol. Om nu s_0, s_1 och s_2 är följande $\mathcal{G}$-tolkningar

	x	y
s_0	a	b
s_1	d	f
s_2	c	c

så är formeln $E(x, y)$ sann i $\mathcal{G}$ under tolkningen s_1 eftersom det finns en båge mellan d och f dvs. $(d, f) \in E^{\mathcal{G}}$. Formeln $E(x, y)$ är inte sann i $\mathcal{G}$ under tolkningarna s_0 och s_2 eftersom (a, b) och (c, c) inte motsvarar bågar i grafen. Å andra sidan är formeln $x = y$ sann i $\mathcal{G}$ under s_2 eftersom $s_2(x) = c = s_2(y)$.

Vi återvänder till den syntaktiska betraktelsen av predikatlogiken. Efter att ha definierat atomära formler kan vi induktivt definiera vad en L-formel är.

Definition 43. Låt L vara ett lexikon. Vi definierar mängden av L-formler enligt följande:

1. Varje atomär L-formel (se Definition 39) är en L-formel.

2. Om A och B är L-formler så är

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

   L-formler.

3. Om A är en L-formel och x_i är en variabel så är $\forall x_i A$ och $\exists x_i A$ L-formler.

Punkt 2 ovan känner vi igen från satslogiken. Vår tolkning av konnektiven sammanfaller med den i satslogiken.

Definition 44. Låt L vara ett lexikon och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning.

1. $\neg A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A inte är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

2. $(A \wedge B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om både A och B är sanna i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

3. $(A \vee B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A eller B är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

4. $(A \rightarrow B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A inte är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s eller B är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

5. $(A \leftrightarrow B)$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om antingen båda eller ingendera är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s.

Det nya är konnektiven i 3. Intuitivt säger $\forall x_i A$ att A stämmer oberoende av hur vi tolkar x_i och $\exists x_i A$ säger att A stämmer för någon tolkning av x. Hur skall vi då definiera när en tolkning satisfierar en kvantifierad formel? Ett första försök är att säga att s satisfierar $\exists x_i A$ om s satisfierar A för någon tolkning av x_i. Men s har ju redan en tolkning för x_i som inte nödvändigtvis satisfierar A. Lösningen är att modifiera s:

Definition 45. Om $\mathcal{M}$ är en modell med domän M och s är en $\mathcal{M}$-tolkning definierar vi $s(a/x_i)$ enligt:

$$s(a/x_i)(x_j) = \begin{cases} a & \text{om } j = i \\ s(x_j) & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi illustrerar idén nedan.

	x	y	z
s	1	7	3
$s(3/x)$	3	7	3
$s(4/y)$	1	4	3

Definition 46. Låt L vara ett lexikon och låt $\mathcal{M}$ vara en modell för L med domän M. Låt vidare s vara en $\mathcal{M}$-tolkning.

1. Formeln $\forall x_i A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A är sann i $\mathcal{M}$ under alla tolkningar $s(a/x_i)$ där $a \in M$.

2. Formeln $\exists x_i A$ är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om A är sann i $\mathcal{M}$ under någon tolkning $s(a/x_i)$ med $a \in M$.

Vi har nu definierat (i Definitioner 39, 44 och 46) när en predikatlogisk formel A är sann i en modell $\mathcal{M}$ under en tolkning s. Vi skriver det kort

$$\mathcal{M} \models_s A.$$

Vi sammanställer predikatlogikens sanningsdefinition, känd som Tarskis sanningsdefinition nedan.

Definition 47 (Tarskis sanningsdefinition)**.** Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ en modell för L. Nedan är $t, u, t_1, \dots t_n$ termer och R en n-ställig predikatsymbol.

1. $\mathcal{M} \models_s t = u$ om och endast om $s(t) = s(u)$.
2. $\mathcal{M} \models_s R(t_1, \dots t_n)$ om och endast om $(s(t_1), \dots s(t_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
3. $\mathcal{M} \models_s \neg A$ om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s A$.
4. $\mathcal{M} \models_s (A \wedge B)$ om och endast om $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$.
5. $\mathcal{M} \models_s (A \vee B)$ om och endast om $\mathcal{M} \models_s A$ eller $\mathcal{M} \models_s B$.
6. $\mathcal{M} \models_s (A \to B)$ om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s A$ eller $\mathcal{M} \models_s B$.
7. $\mathcal{M} \models_s (A \leftrightarrow B)$ om och endast om antingen $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$ eller $\mathcal{M} \not\models_s A$ och $\mathcal{M} \not\models_s B$.
8. $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$ om och endast om $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ för alla $a \in M$.
9. $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$ om och endast om $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ för något $a \in M$.

2.3 Validitet och logiska konsekvenser

I satslogiken delade vi upp formlerna i tautologa, kontradiktoriska och kontingenta. Vi skall se vad motsvarande uppdelning i predikatlogiken är.

Tarskis sanningsdefinition definierar när en L-formel A är sann i en given L-modell $\mathcal{M}$ under en given $\mathcal{M}$-tolkning s. Om formeln är sann i $\mathcal{M}$ oberoede av vilken $\mathcal{M}$-tolkning vi granskar, så säger vi att A är *sann i* $\mathcal{M}$ och skriver $\mathcal{M} \models A$.

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla } \mathcal{M}\text{-tolkningar } s.$$

En L-formel A är *valid* om den är sann i alla L-modeller M. Det betecknas $\models A$.

$$\models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models A \text{ för alla } L\text{-modeller } \mathcal{M}.$$

En allmännare tolkning för “alltid sann” än valid kan vi inte hoppas på. Om A är en L-formel behövs en L-modell för att sanning skall kunna definieras. Därför är predikatlogikens tolkning av “alltid” alla L-modeller.

Specialfall av valida formler är tautologier, dvs formler som har samma form som satslogiska tautologier, men där delformlerna är predikatlogiska formler. Exempel på predikatlogiska tautologier är

- $(R(x, y) \vee \neg R(x, y))$
- $(P(x) \wedge (R(x, y) \vee R(y, z))) \leftrightarrow ((P(x) \wedge R(x, y)) \vee (P(x) \wedge R(y, z)))$
- $(P_0(x) \to P_1(x)) \to (\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$

Förutom dessa finns en hel mängd valida formler som inte är tautologier, t.ex

- $x = x$
- $x = y \to y = x$
- $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$
- $R(x, y) \to \exists z R(x, z)$

På motsvarande sätt kan vi definiera när en formel “kan vara sann” dvs. är satisfierbar. En L-formel A är *satisfierbar* om det finns någon L-modell $\mathcal{M}$ och någon $\mathcal{M}$-tolkning s som satisfierar den, dvs. $\mathcal{M} \models_s A$ för något $\mathcal{M}$ och s. Vidare kan vi definiera att A är *kontradiktorisk* om det här inte inträffar, dvs. om för alla L-modeller $\mathcal{M}$ och alla $\mathcal{M}$-tolkningar s, $\mathcal{M} \not\models_s A$. En L-formel A är *falsifierbar* om den inte är valid, dvs. det finns någon L-modell $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}$-tolkning s så att $\mathcal{M} \not\models_s A$. Om en formel är både satisfierbar och falsifierbar är den *kontingent.*

Exempel 48. Låt $L = \{R\}$.

- Formeln $\forall x \forall y(R(x, y) \vee \neg R(x, y))$ är valid (men inte en tautologi - varför?).
- Formeln $\forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x))$ är kontingent. Om vi definierar $M = \{0, 1\}$ och $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ så är formeln falsk i (M, R_1) men sann i (M, R_2).
- Formeln $x = y$ är kontingent. Till skillnad från formeln ovan kan den vara sann och falsk i samma modell (bara domänen har minst två element) beroende på tolkningen.

- Formeln $\forall x \forall y R(x,y) \wedge \exists x \neg R(x,x)$ är kontradiktorisk. Om $\mathcal{M}$ är en modell som satisfierar formeln $\forall x \forall y R(x,y)$ så måste alla par (a,b), där a och b är i domänen, tillhöra $R^{\mathcal{M}}$. Men då måste också $(a,a) \in R^{\mathcal{M}}$ för alla a i domänen av $\mathcal{M}$, så $\mathcal{M}$ kan inte satisfierar $\exists x \neg R(x,x)$.

Som i satslogiken har vi alltså tre kategorier av formler, men denhär gången är de *valida*, *kontradiktoriska* och *kontingenta*. De valida och kontingenta formlerna är satisfierbara, de kontradiktoriska och kontingenta är falsifierbara.

Om A och B är formler för samma lexikon L säger vi att B är en *logisk konsekvens* av A om i alla L-modeller varje tolkning s som satisfierar A också satisfierar B. Ekvivalent kan vi uttrycka det som att formeln $A \to B$ valid.

Om A och B är formler för samma lexikon L säger vi att A och B är *(logiskt) ekvivalenta* om de är logiska konsekvenser av varandra, dvs. de är sanna med samma tolkningar i samma modeller. Ekvivalent kan vi uttrycka det som att formeln $A \leftrightarrow B$ är valid. Exempel på logiksa ekvivalenser är

- $\neg \forall x A$ och $\exists x \neg A$
- $\neg \exists x A$ och $\forall x \neg A$
- $\forall x (A \wedge B)$ och $\forall x A \wedge \forall x B$

2.4 Fria och bundna variabler

Låt oss jämföra rollen av 'x' i två formler: $R(x, y)$ och $\exists x\ R(x, y)$. Om vi nu granskar en $\{R\}$-modell $\mathcal{M}$ och en $\mathcal{M}$-tolkning s ser vi att sanningen av påståendet $\mathcal{M} \models_s R(x, y)$ beror på hur s tolkar x medan sanningen av $\mathcal{M} \models_s \exists x\ R(x, y)$ inte gör det. Skillnaden beror på att x i den första formeln är *fri* men i den andra *bunden* eftersom kvantifikatorn $\exists$ binder den. Vi definierar begreppen nedan.

Definition 49. En kvantifikators *räckvidd* i en formel A är den delformel av A i vilken kvantifikatorförekomsten är huvudoperator, med andra ord är en kvantifikators räckvidd den minsta delsträng av formeln som börjar med kvantifikatorn i fråga och är en predikatlogisk formel.

Exempel 50. I formlerna nedan är räckvidden av kvantifikatorn $\forall x$ understruken:

$$\underline{\forall x(R_0(x, y) \to R_1(z, x))}$$
$$\underline{\forall x R_0(x, y)} \to R_1(z, x)$$

Definition 51. En förekomst av en variabel x_i är *bunden* om den finns inom räckvidden av en kvantifikator $\forall x_i$ eller $\exists x_i$. En förekomst av en variabel är *fri* om den inte är bunden. En kvantifikator $\forall x_i$ eller $\exists x_i$ *binder* alla fria förekomster av variabeln x_i inom kvantifikatorns räckvidd.

Exempel 52. I formeln $R(x, y)$ är alla variabelförekomster fria.
I formeln $\exists x\ R(x, y)$ är x bunden och y fri.
I formeln $\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$ är den första förekomsten av x fri, de övriga bundna. y är bunden.
I formeln $\forall x \forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$ binder den första kvantifikatorn $\forall$ den *fria* förekomsten av x i formeln $\forall y(R(x, y) \to \exists x\ R(x, y))$. De senare förekomsterna berörs inte för de är redan bundna.

En variabel är fri i formeln A om minst en förekomst av variabeln är fri i A. En variabel är bunden i A om minst en förekomst av variablen är bunden i A. Således kan en variabel vara både fri och bunden, men en variabel*förekomst* är alltid bara endera.

Definition 53. En *sluten formel* eller *sats* är en formel utan fria variabler. En *öppen formel* är en formel med minst en fri variabel. En *variabelfri formel* är en formel i vilken inga variabler förekommer. En *kantifikatorfri formel* är en formel som inte innehåller några kvantifikatorer.

Exempel 54. Följande formler är slutna:

$$P(c_1)$$
$$R(c_0, c_1) \to c_0 = c_1$$
$$\forall x R(x, x)$$

De två första är dessutom kvantifikatorfria och variabelfria. De visar att kvantifikatorfria formler inte nödvändigtvis är öppna. Öppna formler är inte heller nödvändigtvis kvantifikatorfria, vilket följande formel visar:

$$\forall x R(x, y)$$

Då vi granskar sanningen av en formel i en modell under en tolkning spelar endast tolkningarna av de fria variablerna någon roll, eftersom de övriga värdena ändå "omtolkas". Exaktare uttryckt:

Lemma 55. *Låt A vara en L-formel och $\mathcal{M}$ en L-modell. Om s och s' är två tolkningar som ger samma värden åt alla variabler med fria förekomster i A så är A sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om och endast om A är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s'.*

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift. □

Som ett specialfall av fenomenet ovan ser vi att sanningen av slutna formler (satser) i modeller är oberoende av vilken tolkning vi granskar. Således uttrycker satserna någon egenskap modellerna har, i motsats till öppna formler som uttrycker egenskaper av element.

Vi definierade tidigare när A är sann i $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{om och endast om} \quad \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla } \mathcal{M}\text{-tolkningar } s.$$

Då A är en sats är $\mathcal{M} \models A$ ekvivalent med

$$\mathcal{M} \models_s A \text{ för någon } \mathcal{M}\text{-tolkning } s.$$

Då en sats A är sann i $\mathcal{M}$ säger vi att $\mathcal{M}$ är en *modell för A*.

2.5 Definierbarhet

Ett centralt begrepp inom logiken är definierbarhet. Det anger vilka objekt och egenskaper vi kan greppa med våra formler. Man kan säga att hela idén med formler är att de ger oss verktyg att definiera mängder, relationer och dylikt.

Definition 56. Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ en L-modell. En mängd $P \subset M$ är en *definierbar delmängd* i $\mathcal{M}$ om det finns en L-formel A med fria förekomster endast av variabeln x_0 så att

$$P = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models_s A \text{ för alla tolkningar } s \text{ med } s(x_0) = a\}.$$

Vi säger då att A *definierar* P i $\mathcal{M}$. Notera att vi enligt Lemma 55 lika gärna kunde ha skrivit:

$$P = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models_s A \text{ för någon tolkning } s \text{ med } s(x_0) = a\}.$$

Om R är en n-ställig relation säger vi att R är en *definierbar relation* i $\mathcal{M}$ om det finns en L-formel B med endast variablerna $x_0, \ldots, x_{n-1}$ fria så att

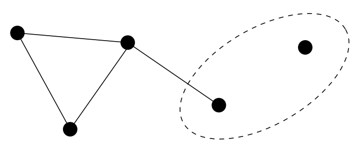
$$R = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in M^n \mid \mathcal{M} \models_s B \text{ för alla tolkningar } s \text{ med } s(x_i) = a_i \text{ för alla } i < n\}.$$

Vi säger då att B *definierar* R i $\mathcal{M}$.

Exempel 57. Låt $L = \{E\}$ och låt $\mathcal{G}$ vara grafen i Figur 5. Låt vidare A vara formeln

$$\forall y \forall z((xEy \land xEz) \to y = z).$$

A har x som enda fria variabel så den definierar en delmängd i $\mathcal{G}$. Formeln uttrycker egenskapen "har högst en granne" så delmängden den definierar är den inom den streckade linjen. Låt oss motivera det noggrannare.



Figur 5: Definierbar delmängd i en graf

Om a är en nod med två (eller fler) grannar finns det två olika noder b och c så att $(a, b) \in E^{\mathcal{G}}$ och $(a, c) \in E^{\mathcal{G}}$. Låt nu s vara en tolkning som satisfierar $s(x) = a$. Då har vi

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEy \quad \text{och} \quad \mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEz \quad \text{men} \quad \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z,$$

dvs. $\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} xEy \land xEz$ men $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z$ och således $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (xEy \land xEz) \to y = z$. Så $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)} \forall z((xEy \land xEz) \to y = z)$ och vidare $\mathcal{G} \not\models_s \forall y \forall z((xEy \land xEz) \to y = z)$.

Om däremot a är en nod med högst en granne och b och c är godtyckliga noder så har vi två alternativ: antingen är någondera inte granne med a eller så måste b och c vara samma nod (eftersom a hade högst en granne). I det förra fallet har vi

$$\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} xEy \quad \text{eller} \quad \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} xEz$$

och således $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (xEy \land xEz)$. I det senare fallet har vi

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} y = z.$$

I båda fallen gäller

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} ((xEy \land xEz) \to y = z)$$

Eftersom b och c var godtyckliga ser vi att

$$\mathcal{G} \models_s \forall y \forall z((xEy \land xEz) \to y = z).$$

Vi har alltså visat att en tolkning s satisfierar formeln A om och endast om $s(x)$ är en nod med högst en granne. Således definierar A mängden av noder med högst en granne.

Familjen av definierbara mängder i en modell är sluten under unioner, snitt och komplement, dvs. om P och P' är definierbara i $\mathcal{M}$ så är också $P \cup P'$, $P \cap P'$ och $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) - P$ det. (Familjen är en Boolesk algebra.) Detsamma gäller familjen av definierbara relationer.

Om R är en binär relation på en mängd M är den *första projektionen* av R mängden av element a så att $(a, b) \in R$ stämmer för något $b \in M$. På motsvarande sätt är den *andra projektionen* av R mängden av $b \in M$ så att $(a, b) \in R$ för något $a \in M$. Projektionerna av definierbara relationer är definierbara (varför?).

2.6 Substitution

Låt x vara en variabel, t en L-term och A en L-formel. Vi vill undersöka $A(t/x)$, den formel vi får då vi substituerar t för alla fria förekomster av x. Men om A är $\exists y\ x < y$ vad är då $A(y/x)$? A uttrycker egenskapen "det finns ett element större än x" så vi skulle vilja säga "det finns ett element större än y. Om vi substituerar y för x får vi dessvärre formeln $\exists y\ y < y$ som uttrycker att det finns ett element som är större än sig självt. Lösningen på problemet går ut på att först omdöpa de bundnda variablerna i A så att substitutionen blir möjlig.

Eftersom tolkningen av de bundna variablerna i en formeln inte påverkar satisfieringen av formeln så kan vi byta ut bundna variabler utan att ändra på betydelsen av formeln. Så är t.ex formlerna

$$\forall x R_0(x, y) \quad \text{och} \quad \forall z R_0(z, y)$$

ekvivalenta. Här måste vi bara vara noggranna så att vi inte binder nya variabler. Så är t.ex. formlerna

$$\forall x R_0(x, y) \quad \text{och} \quad \forall y R_0(y, y)$$

inte ekvivalenta. Men det finns en enkel lösning på problemet. Eftersom formeler är ändliga teckensträngar förekommer det bara ändligt många variabler i dem. Således kan vi alltid välja en ny variabel (dvs en som inte förekommer i formeln) då vi behöver byta ut en bunden variabel. På så sätt kan vi ändra vår ursprungliga formel till en *ekvivalent* formel där substitutionen är möjlig. "Möjlig" definieras exakt av konceptet "fri för".

Definition 58. En L-term t är *fri för* en variabel x_i i en L-formel A om t inte innehåller några variabler som vid substitutionen av t för alla fria förekomster av x_i blir bunden av en kvantifikator i A.

Eftersom de enda termer vi känner hittills utgörs av variabler och konstantsymboler innebär "t är fri för x" att t inte är en variabel som blir bunden då den substitueras för alla fria förekomster av x i A.

Definition 59. Låt L vara ett lexikon, A en L-formel och t en L-term. Med notationen $A(t/x_i)$ avser vi resultatet av substituitionen av t för alla fria förekomster av x_i i A. Vi använder notationen $A(t/x_i)$ bara då t är fri för x_i i A.

Exempel 60.

- z är fri för x i $R(x, y) \wedge \forall y R(x, y)$. Om vi substituerar z för x får vi $R(z, y) \wedge \forall y(z, y)$.
- z är inte fri för x i $\exists z R(x, z) \wedge \forall y R(x, y)$ eftersom en substitution skulle ge $\exists z R(z, z) \wedge \forall y R(z, y)$ där en fri förekomst av x har blivit en bunden förekomst av z.
- En konstant är fri för varje variabel x_i i varje formel eftersom konstanter inte innehåller variabler som kan bli bundna i substitutionen.

Observera att då vi omdöper bundna variabler är resultatet en ekvivalent formel, medan substitution inte resulterar i ekvivalenta formler. $P_0(x)$ och $P_0(y)$ är inte ekvivalenta, vi kan enkelt konstruera en modell och tolkning som satisfierar den ena men inte den andra.

Vi tar här i bruk notationen $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ för *värdet* av termen t i modellen $\mathcal{M}$ under tolkningen s. Vi minns att om t är en variabel x_i så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i)$, om t är en konstant c_i så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.

Lemma 61 (Substitutionslemmat)**.** *Låt L vara ett lexikon, A en L-formel och t en L-term. Om t är fri för x i A så är följande påståenden ekvivalenta för alla L-modeller $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}$-tolkningar s:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$

2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, *där* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Bevis. Beviset lämnas som övningsuppgift åt läsaren (strukturell induktion). □

Med hjälp av substitutionslemmat kan vi visa att

$$\forall x A \Rightarrow A(t/x).$$

Låt nämligen $\mathcal{M}$ vara en modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning så att $\mathcal{M} \models_s \forall x A$. Låt nu $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Då gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ och enligt substitutionslemmat därmed $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$.

På motsvarande sätt kan vi se att

$$A(t/x) \Rightarrow \exists x A.$$

2.7 Naturlig deduktion

I satslogiken introducerade vi deduktion som ett behändigare sätt att finna logiska konsekvenser än vad sanningsvärdetabeller ger. I predikatlogiken har vi inga sanningsvärdetabeller så deduktionen blir än viktigare. Det går att bevisa att validitet är ett s.k. icke beräkningsbart problem, d.v.s. det finns ingen algoritm som avgör om en given formel är valid eller inte.

I satslogiken byggde vi upp deduktioner med introduktions- och elimineringsregler för konnektiven. Samma regler använder vi inom predikatlogiken. Eftersom predikatlogiken dessutom har kvantifikatorer behöver vi fler regler. Idén är fortfarande densamma, vi bygger deduktioner med hjälp av introduktion och eliminering.

Elimineringsregeln för allkvantifikatorn är

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\ \mathrm{E}$$

Notera att t måste vara fri för x (annars är $A(t/x)$ inte definierad). I övrigt får t vara en godtycklig term. Motiveringen till regeln kommer av att iplikationen $\forall x A \to A(t/x)$ är valid.

I regeln för introduktion av allkvantifikatorn behövs ett tilläggsvillkor.

$$\frac{A}{\forall x A}\ \forall\ \mathrm{I}$$

Villkor: x får inte förekomma fri i någon (ostruken) premiss som förekommer i deduktionen av A.

Villkoret behövs för att härledninssteget skall vara sunt. Intuitivt uttrycker A någon egenskap av x. Från att ett visst element har den egenskapen kan vi inte härleda att alla element skulle ha den. Men om härledningen inte innehåller premisser där x skulle förekomma fri, så har vi inte gjort några antaganden om x. Således kunde x vara vilket element som helst och därför gäller $\forall x$. En noggrannare motivering kommer i beviset av sundhetsteoremet i följande avsnitt.

Exempel 62. Ett enkelt exempel på användning av eliminerings- och introduktionsreglerna för allkvantifikatorn är följande.

$$\cfrac{\cfrac{\forall x P(x)}{P(y)}\ \forall\ \mathrm{E}}{\forall y P(y)}\ \forall\ \mathrm{I}$$

Notera att y är fri för x i $P(x)$ och att y inte förekommer fri i premissen $\forall x P(x)$.

Den enkla regeln för existenskvantifikatorn är introduktionsregeln:

$$\frac{A(t/x)}{\exists x A}\ \exists\ \mathrm{I}$$

Det enda kravet här är att t måste vara fri för x. I övrigt kan t vara en godtycklig term. Regeln motiveras med att $A(t/x) \to \exists x A$ är valid.

För att eliminera en existenskvantifikator behövs ett tilläggsvillkor. Regeln är:

$$\frac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\ \exists\ \mathrm{E}$$

Villkor: x får inte förekomma fri i B eller i någon ostruken premiss som förekommer i deduktionen av B, förutom i A.

Resonemanget i regeln påminner om det i elmininering av disjunktion. Informellt resonerar vi: Vi vet att $\exists xA$ stämmer. Vi gör ett tillfälligt antagande att A stämmer (dvs att x ger det värde som satisfierar A) och härleder något allmängiltigt därifrån. Om vår slutsats inte säger något om x spelar det ingen roll vilket element det är som satisfierar A, slutsatsen är ändå giltig eftersom *något* x duger. Så vi drar slutsatsen B och stryker vår tillfälliga premiss A.

Exempel 63. Vi härleder $\exists xA$ från $\neg\forall x\neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{\exists xA}\,\exists\,\mathrm{I} \qquad [\neg\exists xA]^2}{\exists xA\wedge\neg\exists xA}\,\wedge\,\mathrm{I}}{\neg A}\,\neg\,\mathrm{I},1}{\forall x\neg A}\,\forall\,\mathrm{I, obs} \qquad \neg\forall x\neg A}{\forall x\neg A\wedge\neg\forall x\neg A}\,\wedge\,\mathrm{I}}{\neg\neg\exists xA}\,\neg\,\mathrm{I},2}{\exists xA}\,\neg\,\mathrm{E}$$

obs: x förekommer inte fri i $\neg\exists xA$, den enda ostrukna premiss vi har kvar i det här skedet.

Exempel 64. Vi härleder $\neg\forall x\neg A$ från $\exists xA$.

$$\dfrac{\exists xA \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{[\forall x\neg A]^1}{\neg A}\,\forall\,\mathrm{E}}{A\wedge\neg A}\,\wedge\,\mathrm{I}}{\neg\forall x\neg A}\,\neg\,\mathrm{I},1}{\neg\forall x\neg A}\,\exists\,\mathrm{E},2,\mathrm{obs}$$

obs: x förekommer inte fri i $\neg\forall x\neg A$ och den enda ostrukna premiss vi har kvar i deduktionen av $\neg\forall x\neg A$ är A där x fick förekomma fri.

Formellt kan vi definiera naturlig deduktion som i Definition 19, med några additioner:

Definition 65. Mängden av deduktioner $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ i predikatlogiken definieras som i definition 19 med den skillnaden att triviala deduktioner (punkt 1.) utgörs av *predikatlogiska* formler A samt med följande tillägg:

12. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är en deduktion och x_i inte förekommer fri i någon ostruken premiss i deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$, så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{\forall x_iA}$ en deduktion.

13. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_iA\end{matrix}$ är en deduktion och t är en term som är fri för x_i i A så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_iA\end{matrix}}{A(t/x_i)}$ en deduktion.

14. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}$ är en deduktion och t är en term som är fri för x_i i A så är $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}}{\exists x_iA}$ en deduktion.

15. Om $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \exists x_iA\end{matrix}$ och $\begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ är deduktioner och x_i inte förekommer fri i B eller i någon ostruken premiss i deduktionen $\begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$, förutom i A, så är

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A] \\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} \\ \exists x_i A & B \end{matrix}}{B}$$

en deduktion.

Om $\mathcal{S}$ är en mängd predikatlogiska formler och A är en predikatlogisk formel använder vi som förut notationen

$$S \vdash A$$

för att beteckna att det finns en naturlig deduktion av A så att premisserna är i $\mathcal{S}$.

Vi sammanställer deduktionsreglerna i Tabell 4.

	Introduktion	Elimination
Konjunktion	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B} \wedge \mathrm{E}$
Disjunktion	$\dfrac{A}{A \vee B} \vee \mathrm{I} \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \vee \mathrm{I}$	$\dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B] \\ & \vdots & \vdots \\ A \vee B & C & C \end{matrix}}{C} \vee \mathrm{E}$
Implikation	$\dfrac{\begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \to B} \to \mathrm{I}$	$\dfrac{A \to B \quad A}{B} \to \mathrm{E}$
Ekvivalens	$\dfrac{\begin{matrix} [A] & [B] \\ \vdots & \vdots \\ B & A \end{matrix}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathrm{I}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A} \leftrightarrow \mathrm{E}$
Negation	$\dfrac{\begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{matrix}}{\neg A} \neg \mathrm{I}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A} \neg \mathrm{E}$
Allkvantifikator	$\dfrac{A}{\forall x_i A} \forall \mathrm{I}$ x_i får inte förekomma fri i någon premiss i deduktionen av A	$\dfrac{\forall x_i A}{A(t/x_i)} \forall \mathrm{E}$ t måste vara fri för x_i i A
Existenskvantifikator	$\dfrac{A(t/x_i)}{\exists x_i A} \exists \mathrm{I}$ t måste vara fri för x_i i A	$\dfrac{\begin{matrix} & [A] \\ & \vdots \\ \exists x_i A & B \end{matrix}}{B} \exists \mathrm{E}$ x_i får inte förekomma fri i B eller i någon premiss i deduktionen av B, förutom i A

Tabell 4: Predikatlogikens deduktionsregler

2.8 Sundhet

Nästa steg är att bevisa sundhetsteoremet för naturlig deduktion inom predikatlogiken. Vi har fyra nya regler så vi har alldeles nya bitar som vi måste visa är sunda. Men vi måste också gå igenom de gamla reglerna, eftersom våra formler och vår definition av sanning avviker från satslogikens. Vi kallar en deduktion inom predikatlogiken *sund* om slutsatsen av deduktionen är en logisk konsekvens av premisserna, dvs. varje modell och tolkning som satisfierar premisserna satisfierar slutsatsen.

Teorem 66 (Predikatlogikens sundhetsteorem)**.** *Låt L vara ett lexikon. Om $\mathcal{S}$ är en mängd L-formler, A en L-formel och $S \vdash A$ så är A en logisk konsekvens av $\mathcal{S}$.*

Bevis. Vi bevisar teoremet med induktion över strukturen av naturliga deduktioner.

1. Om $\mathcal{P}$ är den triviala deduktionen A så är A en premiss. Således om $\mathcal{M}$ och s satisfierar premisserna till $\mathcal{P}$ så gäller $\mathcal{M} \models_s A$.

2. Antag som induktionshypotes att deduktionerna $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ och $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ är sunda. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}$. Låt vidare $\mathcal{M}$ vara en L-modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning så att $\mathcal{M} \models_s C$ för varje premiss C i $\mathcal{R}$. Eftersom premisserna i $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är premisser i $\mathcal{R}$ och $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är sunda måste vi ha $\mathcal{M} \models_s A$ och $\mathcal{M} \models_s B$. Enligt Tarskis sanningsdefinition gäller då $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$. Således är $A \wedge B$ är en logisk konsekvens av premisserna till $\mathcal{R}$.

3.-11. De övriga reglerna för konnektiven bevisas genom motsvarande modifikation av bevisen i Teorem 20.

12. Låt $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ vara en deduktion där x_i inte förekommer fri i någon premiss. Antag som induktionshypotes att deduktionen $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ är sund och låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{\forall x_i A}$. Låt $\mathcal{M}$ vara en L-modell och s en $\mathcal{M}$-tolkning som satisfierar alla premisser i $\mathcal{R}$ och således i $\mathcal{P}$. Låt $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ vara ett godtyckligt element. Eftersom x_i inte förekommer fri i premisserna till $\mathcal{P}$ så satisfieras de även av tolkningen $s(a/x_i)$ enligt Lemma 55. Eftersom $\mathcal{P}$ är sund gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ och således enligt Tarskis sanningsdefinition $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$.

13. Antag som induktionshypotes att $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}$ är en sund deduktion. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{matrix}}{A(t/x_i)}$ där t är fri för variableln x_i i A. Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$ och således till $\mathcal{P}$. Enligt induktionhypotesen gäller $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$. Således gäller för varje $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ att $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ och då i synnerhet
$$\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle/x_i)} A.$$
Eftersom t är fri för x_i i A gäller enligt Substitutionslemmat (Lemma 61) $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$.

14. Antag att $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}$ är en sund deduktion och t är fri för x_i i A. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{matrix}}{\exists x_i A}$. Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$. Dessa är samma som

premisserna till $\mathcal{P}$ så enligt induktionshypotesen gäller $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$. Enligt Substitutionslemmat (Lemma 61) gäller då $\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle/x_i)} A$. Eftersom $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \in \mathrm{dom}\,\mathcal{M}$ så gäller $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$.

15. Antag att $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array}$ och $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ är sunda deduktioner och att x_i inte förekommer fri i B eller i någon premiss i $\mathcal{Q}$ förutom i A. Låt $\mathcal{R}$ vara deduktionen $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}}{B}$.

    Låt $\mathcal{M}$ och s satisfiera premisserna till $\mathcal{R}$. De satisfierar då premisserna till $\mathcal{P}$ och därmed enligt induktionhypotesen $\exists x_i A$. Det finns alltså något $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ så att $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$. Således satisfierar $s(a/x_i)$ premissen A i $\mathcal{Q}$. Eftersom s satisfierar de övriga premisserna till Q och x_i inte förekommer fri i dessa så satisfierar $s(a/x_i)$ alla premisser i $\mathcal{Q}$. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} B$. Eftersom x_i inte förekommer fri i B gäller enligt Lemma 55 $\mathcal{M} \models_s B$.

□

Korollarium 67. *Om det finns en naturlig deduktion av A så är A valid.*

Bevis. Om A har en naturlig deduktion utan premisser så satisfierar alla modeller och tolkningar premisserna i deduktionen. Enligt sundhetsteoremet satisfierar de då A. □

Sundhetsteoremet använder vi på motsvarande sätt som inom satslogiken. Om vi vill visa att det inte finns en deduktion av en formel A, eventuellt från en given mängd premisser, så kan vi visa att formeln inte är valid, resp. en logisk konsekvens av premisserna. Av sundhetsteoremet följer då att A inte kan härledas.

Exempel 68. Vi visar att det inte finns en naturlig deduktion av formeln $\exists y \forall x R_0(x,y)$ från formeln $\forall x \exists y R_0(x,y)$. Låt nämligen $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0,1\}$ och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,0)\}$. Då gäller för varje $\mathcal{M}$-tolkning s (en skulle räcka) att

- $(s(0/x)(1/y)(x), s(0/x)(1/y)(y)) = (0,1) \in R_0^{\mathcal{M}}$, så $\mathcal{M} \models_{s(0/x)(1/y)} R_0(x,y)$, så $\mathcal{M} \models_{s(0/x)} \exists y R_0(x,y)$
- $(s(1/x)(0/y)(x), s(1/x)(0/y)(y)) = (1,0) \in R_0^{\mathcal{M}}$, så $\mathcal{M} \models_{s(1/x)(0/y)} R_0(x,y)$, så $\mathcal{M} \models_{s(1/x)} \exists y R_0(x,y)$

dvs. för varje $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} \exists y R_0(x,y)$ och således $\mathcal{M} \models_s \forall x \exists y R_0(x,y)$.

Ändå gäller för inget $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ att $(a,a) \in R_0^{\mathcal{M}}$. Så $M \not\models_{s(a/y)(a/x)} R_0(x,y)$, och därmed $M \not\models_{s(a/y)} \forall x R_0(x,y)$, hur vi än väljer a. Så $\mathcal{M} \not\models_s \exists y \forall x R_0(x,y)$.

Vi har visat att $\exists y \forall x R_0(x,y)$ inte är en logisk konsekvens av $\forall x \exists y R_0(x,y)$. Enligt sundhetsteoremet gäller då

$$\{\forall x \exists y R_0(x,y)\} \nvdash \exists y \forall x R_0(x,y).$$

2.9 Axiom och teorier

I avsnitt 2.5 definierade vi predikat och relationer inom en modell. Ett besläktat fenomen är då vi använder mängder av predikatlogiska satser, *teorier*, för att beskriva klasser av modeller. I det här avsnittet definierar vi vad en teori är och ger enkla exempel på teorier.

Definition 69. Låt L vara ett lexikon. En *(L)-teori* T är en mängd L-satser. Elementen i T är teorins *axiom*. Om $\mathcal{M}$ är en L-modell så att $\mathcal{M} \models A$ för alla $A \in T$ så är $\mathcal{M}$ en *modell för* T. Om en sats B är härledbar ur T så är B ett teorem i T.

Exempel 70. Lexikonet för grafer består av en tvåställig relationssymbol, oftast E. En graf är en binär relation som är symmetrisk och irreflexiv. Axiomen för grafer är

1. $\forall x \forall y (xEy \to yEx)$ (symmetri)
2. $\forall x \neg xEx$ (irrreflexivitet)

En modell är alltså en graf om och endast om den satisfierar axiomen ovan.

Ett exempel på ett teorem i grafteorin är $\forall x \forall y (xEy \to \neg x = y)$ (som är ett annat sätt att uttrycka irreflexiviteten).

Exempel 71. Ett annat bekant exempel är axiomen för en linjär ordning (med lexikonet $L = \{<\}$):

1. $\forall x \neg x < x$ (irreflexivitet)
2. $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ (transitivitet)
3. $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$ (totalitet)

Exempel på linjära ordningar är de naturliga talen eller de reella talen med sin naturliga ordning "mindre än".

Exempel på teorem i teorin är: $\forall x \forall y (x < y \to \neg y < x)$ och $\forall x \forall y \forall z (x < y \to (x < z \vee z < y))$.

Exempel 72. Vi har givit *identitetsymbolen* $=$ en speciell roll: den tolkas i varje modell $\mathcal{M}$ som den riktiga identiteten

$$=^{\mathcal{M}} = \{(a, a) \mid a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}.$$

Dethär bruket styrs av att vi i all tysthet antagit att alla modeller vi granskar är modeller för *identitetsaxiomen*:

1. $\forall x \; x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \to x = z)$
4. $\forall x \forall y ((x = y \wedge P_n(x)) \to P_n(y))$
5. $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \wedge x' = y' \wedge R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$

Exempel på teorem i teorin för identitet är $\forall x \exists y \; x = y$ och $\exists x \forall y \; x = y \to \forall x \forall y \; x = y$.

Då vi härleder satser med identiteter innebär vårt tysta antagande att alla modeller satisfierar identitetsaxiomen att vi får använda dem som premisser i härledningen. Så kan vi t.ex. härleda $\forall x P_0(x)$ från formlerna $\forall x \; x = c$ och $P_0(c)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \forall y((x = y \wedge P_0(x)) \to P_0(y))$}
\RightLabel{$\forall$ E}
\UnaryInfC{$\forall y((c = y \wedge P_0(c)) \to P_0(y))$}
\RightLabel{$\forall$ E}
\UnaryInfC{$(c = x \wedge P_0(c)) \to P_0(x)$}
\AxiomC{$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$}
\RightLabel{$\forall$ E}
\UnaryInfC{$\forall y(x = y \to y = x)$}
\RightLabel{$\forall$ E}
\UnaryInfC{$x = c \to c = x$}
\AxiomC{$\forall x\ x = c$}
\RightLabel{$\forall$ E}
\UnaryInfC{$x = c$}
\RightLabel{$\to$ E}
\BinaryInfC{$c = x$}
\AxiomC{$P_0(c)$}
\RightLabel{$\wedge$ I}
\BinaryInfC{$c = x \wedge P_0(c)$}
\RightLabel{$\to$ E}
\BinaryInfC{$P_0(x)$}
\RightLabel{$\forall$ I, obs}
\UnaryInfC{$\forall x P_0(x)$}
\end{prooftree}
$$

obs: x förekommer inte fri i någon premiss

Exempel 73. För varje $n \in \mathbb{N}$ kan vi uttrycka att en modell har högst n element med axiomet:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Inom första ordningens logik kan vi emellertid inte uttrycka att modellens domän är ändlig. Dethär bevisas t.ex. på kursen i matematisk logik och grundkursen i modellteori.

2.10 Semantiska träd

I satslogiken använde vi semantiska träd för att finna värderingar som satisfierar roten i trädet eller för att visa att sådana inte finns. På motsvarande sätt kan vi inom predikatlogiken använda semantiska träd för att finna modeller och tolkningar som satisfierar rotformeln eller för att visa att sådana inte finns.

I predikatlogiken innehåller semantiska träd både satser och öppna formler. Nedbrytningsreglerna för konnektiven är desamma som i satslogiken. För kvantifikatorerna behövs fyra nya regler:

- Allkvantifikatorn:

$$\begin{array}{c} \forall x A \\ | \\ A(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array}$$

  I den första regeln är t en godtycklig term som förekommer på samma gren som $\forall x A$, med begränsningen att t måste vara fri för x i A. I den andra regeln är c_i en ny konstant.

- Existenskvantifikatorn:

$$\begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x A \\ | \\ \neg A(t/x) \end{array}$$

  I den första regeln är c_i en ny konstant. I den andra regeln är t en godtycklig term som förekommer på samma gren som $\neg\exists x A$, med begränsningen att t är fri för x i A.

Då vi tillämpat reglerna

$$\begin{array}{c} \neg\forall x A \\ | \\ \neg A(c_i/x) \end{array} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{c} \exists x A \\ | \\ A(c_i/x) \end{array}$$

kan vi markera dem som behandlade (med ✓). Vi har då introducerat nya konstanter som bevittnar formeln. De två andra kvantifikatorreglerna markeras aldrig. De måste tillämpas på nytt varje gång en ny term dyker upp på grenen. Om det inte finns konstanter på grenen kan man använda konstantsymbolen c_0.

I tabell 5 finns nedbrytningsreglerna för semantiska träd sammanställda.

Exempel 74. Med hjälp av semantiska träd kan vi konstruera modeller för givna satser (om sådana existerar). Vi använder ett semantiskt träd för att finna en modell för satsen $\exists x \forall y R(x, y) \wedge \neg\forall x R(x, x)$.

Konjunktion	$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \mid \\ A \\ \mid \\ B \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \wedge B)} \\ \neg A & \neg B \end{array}$
Disjunktion	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \vee B} \\ A & B \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$
Negation	$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \mid \\ A \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} A \\ \mid \\ \neg A \\ \mid \\ \times \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} \neg A \\ \mid \\ A \\ \mid \\ \times \end{array}$
Implikation	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \to B} \\ \neg A & B \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ \mid \\ A \\ \mid \\ \neg B \end{array}$
Ekvivalens	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ A & \neg A \\ \mid & \mid \\ B & \neg B \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ A & \neg A \\ \mid & \mid \\ \neg B & B \end{array}$
Allkvantifikator	$\begin{array}{c} \forall x A \\ \mid \\ A(t/x) \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} \neg\forall x A \\ \mid \\ \neg A(c_i/x) \end{array}$
Existens-kvantifikator	$\begin{array}{c} \exists x A \\ \mid \\ A(c_i/x) \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} \neg\exists x A \\ \mid \\ \neg A(t/x) \end{array}$

Tabell 5: Nedbrytningsreglerna för semantiska träd i predikatlogiken

$$\begin{array}{c} \exists x \forall y R(x,y) \wedge \neg\forall x R(x,x) \checkmark \\ \mid \\ \exists x \forall y R(x,y) \checkmark \\ \mid \\ \neg\forall x R(x,x) \checkmark \\ \mid \\ \forall y R(c_0,y) \\ \mid \\ \neg R(c_1,c_1) \\ \mid \\ R(c_0,c_0) \\ \mid \\ R(c_0,c_1) \end{array}$$

Med hjälp av trädet kan vi konstruera modellen $\mathcal{M} = (M, R, c_0, c_1)$ där $M = \{0,1\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(0,1)\}$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ och $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Det är lätt att se att $\mathcal{M} \models \exists x \forall y R(x,y) \wedge \neg\forall x R(x,x)$.

Exempel 75. Semantiska träd är inte alltid det enklaste sättet att finna en modell. Vi vet (övning 9.7) att det finns en tvåelementsmodell $\mathcal{M}$ så att $\mathcal{M} \models \forall y \exists x R(x,y)$ men $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y R(x,y)$. Men försöker vi hitta en modell med ett semantiskt träd får vi:

$$
\begin{array}{c}
\forall y \exists x R(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x,y) \checkmark]] \\
| \\
\forall y \exists x R(x,y) \\
| \\
\neg \exists x \forall y R(x,y) \\
| \\
\exists x R(x, c_0) \checkmark \\
| \\
R(c_1, c_0) \\
| \\
\neg \forall y R(c_0, y) \checkmark \\
| \\
\neg R(c_0, c_2) \\
| \\
\exists x R(x, c_1) \checkmark \\
| \\
R(c_3, c_1) \\
| \\
\neg \forall y R(c_1, y) \checkmark \\
| \\
\neg R(c_1, c_4) \\
| \\
\exists x R(x, c_2) \checkmark \\
| \\
R(c_5, c_2) \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Trädet hjälper oss visserligen att konstruera en modell $\mathcal{M}$ med

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(\mathcal{M}) &= \{c_i : i \in \mathbb{N}\}, \\
R^{\mathcal{M}} &= \{(c_{2i+1}, c_i) : i \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

och det är enkelt att kontrollera att $\mathcal{M} \models \forall y \exists x R(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y R(x,y)$, men det ger oss inte den enklaste möjliga modellen.

Styrkan i semantiska träd ligger i de fall då de *inte* ger en modell. Ett *semantiskt bevis* för en formel A är ett semantiskt träd för $\neg A$ där alla grenar är slutna. Det visar att det inte finns en modell $\mathcal{M}$ och en tolkning s så att $\mathcal{M} \models_s \neg A$, dvs. alla modeller och tolkningar måste satisfiera A. Metoden bygger på följande teorem:

Teorem 76. *Om en formel A har ett semantiskt bevis så är A valid.*

Bevis. Om A har ett semantiskt bevis så finns det ett semantiskt träd $\mathcal{P}$ med $\neg A$ som rot och där alla grenar är slutna. Om nu A inte är valid så finns det en modell $\mathcal{M}$ och en tolkning s så att $\mathcal{M} \models_s \neg A$. Idén i beviset är att med induktion finna en gren i $\mathcal{P}$ så att alla formler på grenen satisfieras av $\mathcal{M}$ och s. Eftersom alla grenar är slutna finns det en formel B så att både B och $\neg B$ finns på grenen och därmed måste $\mathcal{M} \models_s B \wedge \neg B$ vilket är omöjligt. Teoremet bevisas med induktion och vi ger nedan en skiss av beviset. Ett noggrant bevis skulle kräva mer detaljer i och med att vi i kvantifikatorstegen tvingas utvidga det ursprungliga lexikonet för $\mathcal{M}$.

I induktionens bassteg skall vi visa att $\mathcal{M}$ och s satisfierar roten på trädet, dvs $\neg A$, vilket stämmer på grund av vårt antagande.

I induktionssteget antar vi som induktionshypotes att vi har tagit oss neråt längs en gren till en formel B så att B och alla tidigare formler på grenen satisfieras av $\mathcal{M}$ och s. Vi antar också att vi inte är mitt i tillämpningen av en regel, dvs. B är inte den första av två formler som tillagts på grenen vid tillämpande av en nedbrytningsregel som ger två formler på en gren (t.ex. $B \wedge C$). Hur vi fortsätter neråt beror på vilken regel som tillämpats i trädet efter B.

- Konjunktion

  $$\begin{array}{c} C \wedge D \\ | \\ C \\ | \\ D \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(C \wedge D) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg C \quad \neg D \end{array}$$

  Om följande formler har kommit från en tillämpning av regeln för konjunktion på formeln $C \wedge D$ så fortsätter grenen efter B med formlerna C och D. Eftersom vi tillämpat nedbrytningsregeln på formeln $C \wedge D$ måste den förekomma tidigare på grenen och enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M} \models_s C \wedge D$. Men då gäller både $\mathcal{M} \models_s C$ och $\mathcal{M} \models_s D$ och vi kan vandra två steg vidare på grenen.

  Om trädet förgrenar sig på grund av en tillämpning av regeln för en negation av en konjunktion på formeln $\neg(C \wedge D)$ så gäller som ovan att formeln i fråga finns på grenen och därmed gäller $\mathcal{M} \models_s \neg(C \wedge D)$. Då gäller $\mathcal{M} \not\models_s C \wedge D$ så antingen gäller $\mathcal{M} \not\models_s C$ eller $\mathcal{M} \not\models_s D$, dvs. $\mathcal{M} \models_s \neg C$ eller $\mathcal{M} \models_s \neg D$. Beroende på vilkendera formeln som satisfieras väljer vi den vänstra eller den högra förgreningen och fortsätter ett steg vidare.

- De övriga konnektiven $(\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ lämnas åt läsaren.

- Allkvantifikator

  $$\begin{array}{c} \forall x C \\ | \\ C(t/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x C \\ | \\ \neg C(c_i/x) \end{array}$$

  Om följande formel på grenen har kommit från en tillämpning av regeln för $\forall x C$ och nästa formel är $C(t/x)$ så gäller enligt induktionshypotesen $\mathcal{M} \models_s \forall x C$. Om tolkningen av t är a så gäller $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} C$ och enligt substitutionslemmat $\mathcal{M} \models_s C(t/x)$. Om t ännu inte har en tolkning i $\mathcal{M}$ kan vi fritt välja den och fortfarande gäller $\mathcal{M} \models_s C(t/x)$. Således kan vi gå ett steg vidare i trädet.

  Om följande formel på grenen har kommit från en tillämpning av regeln för $\neg\forall x C$ och nästa formel är $\neg C(c_i/x)$ så gäller enligt induktionshypotesen $\mathcal{M} \models_s \neg\forall x C$. Det finns då ett element a i M så att $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} \neg C$. Eftersom c_i är en ny konstantsymbol har den ännu ingen tolkning i $\mathcal{M}$ så vi kan välja $c_i^{\mathcal{M}} = a$. Då gäller enligt substitutionslemmat $\mathcal{M} \models_s \neg C(c_i/x)$ och vi kommer ett steg vidare i trädet.

- Existenskvantifikatorreglerna behandlas på motsvarande sätt.

Eftersom vi antog att alla grenar i $\mathcal{P}$ är slutna, måste $\mathcal{P}$ vara ändligt. Således når vi till slut ändan av en gren (med ett $\times$) och måste ha stött på en kontradiktion på vägen. $\square$

2.11 n-ställiga predikat och funktioner

Våra exempel på relationer hittills har begränsats till enställiga predikat P_i och tvåställiga relationer R_i. Då vi utvidgar vårt lexikon till relationer med större ställighet behöver vi en metod att märka ut ställigheten på relationen. Vi löser problermet genom att beteckna n-ställiga relationssymboler med

$$R_0^n, R_1^n, \text{ osv.}$$

Då är tolkningen av R_i^n i $\mathcal{M}$, $(R_i^n)^{\mathcal{M}}$ en n-ställig relation i $M = \text{dom}(\mathcal{M})$

$$(R_i^n)^{\mathcal{M}} \subseteq M^n.$$

Vi definierade atomära formler och deras satisfiering för n-ställiga relationer så det enda tillägg vi behöver göra är i identitetsaxiomen. Där tillägger vi axiomet:

- $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \dots, x_n)) \to R_i^n(y_1, \dots y_n))$

Den största skillnaden får vi då vi tillåter funktionssymboler i lexikonet. Med hjälp av funktionssymboler kan vi inom logiken granska funktioner i våra modeller. Funktionerna kan vara enställiga, som t.ex. x^{-1} och $\cos(x)$ eller flerställiga som t.ex. de linjära avbildningarna $2x + 3y - z$ och $x - y$.

För att kunna nämna funktioner i formlerna introducerar vi för varje $n > 0$ n-ställiga funktionssymboler

$$F_0^n, F_1^n, \dots \text{ (i praktiken ofta } F, F', G, G', \dots)$$

Då ett lexikon L innehåller funktionssymboler måste varje L-modell $\mathcal{M}$ ha en tolkning av dem. Tolkningen av en n-ställig funktionssymbol F_i^n är en (total) n-ställig funktion i M:

$$(F_i^n)^{\mathcal{M}} : M^n \to M.$$

Funktionssymbolernas inverkan på formlerna ligger i att de ger oss nya termer. Genom sammansatta funktioner ger varje funktionssymbol oss oändligt (numrerbart) många nya termer. Några exempel är

$$F_0^1(x),\ F_1^1(c_0),\ F_0^2(x, c_0),\ F_0^2(F_1^1(x), y), \dots$$

Termer som inte innehåller variabler kallas *konstanttermer*. Förutom konstanter kan dessa även innehålla funktionssymboler, som t.ex. $F_0^2(c_0, c_1)$.

Termerna används såsom tidigare i atomära formler

- $t_1 = t_2$, t.ex. $F^1(x) = F_0^2(c_0, F_2^3(x, y, z))$
- $R_i^n(t_1, \dots, t_n)$, t.ex. $R_0^3(x, F_0^1(x), F_0^1(F_0^1(x)))$

För att veta när dessa satisfieras måste vi utvidga vår definition av värdet på en term:

1. Om $t = x_i$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = x_i^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = s(x_i)$.
2. Om $t = c_i$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = c_i^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.
3. Om $t = F_i^n(t_1, \dots, t_n)$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle =$

$$F_i^n(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = (F_i^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s \rangle, \dots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s \rangle).$$

För att tolka en term $F(t_1, t_2)$ måste vi alltså först finna värdet av termerna t_1 och t_2 (induktiv definition). Det här ger oss två element, säg a och b, i M. Sedan ser vi vilken funktion F står för och finner den tvåställiga funktionen $F^{\mathcal{M}} : M^2 \to M$. Då är $F(t_1, t_2)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ helt enkelt värdet $F^{\mathcal{M}}(a, b)$, ett element i M.

Exempel 77. Låt $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, F^{\mathcal{M}}, G^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$ där $F^{\mathcal{M}}(m) = m + 1$, $G^{\mathcal{M}}(m, n) = m + n$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ och $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Vi vill avgöra om

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x, y)$$

då $s(x) = 0$ och $s(y) = 2$. Nu är

$$F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}) = 1 + 1 = 2$$

och

$$G(x, y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G^{\mathcal{M}}(x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, y^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = G^{\mathcal{M}}(s(x), s(y)) = 0 + 2 = 2.$$

Alltså är $F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G(x, y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och enligt Tarskis sanningsdefinition (för formler av formen $t = t'$) gäller

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x, y).$$

Exempel 78. Med en funktionssymbol $\circ$ i lexikonet kan vi t.ex. behandla gruppoperationer. Gruppaxiomen är då följande predikatlogiska formler (för enkelhets skull har vi också inkluderat en konstantsymbol e för neutralelementet):

$$\begin{array}{l} \forall x\forall y\forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)) \\ \forall x(x \circ e = x \land e \circ x = x) \\ \forall x\exists y(x \circ y = e \land y \circ x = e) \end{array}$$

Nu är varje $\{\circ, e\}$-modell G som uppfyller axiomen en grupp. Observera att slutenhetsaxiomet "för alla $a, b \in G$ gäller $a \circ b \in G$" följer av att $\circ$ är en funktionssymbol och måste tolkas som en total funktion i G.

Exempel 79. En annan klassisk struktur är $(\mathbb{N}, s)$ där s är efterföljarfunktionen $s(n) = n+1$. Ofta inkluderar man 0 som en konstant.

Strukturen har bl.a. följande egenskaper:

- $s(n) = s(m) \to n = m$,
- om $n \neq 0$ så finns ett m så att $s(m) = n$.

I strukturen håller också det s.k. *induktionsschemat*: Om A är en $\{s, 0\}$-formel så är

$$(A(0/x_0) \land \forall x_0(A \to A(s(x_0)/x_0))) \to \forall x_0 A$$

ett induktionsaxiom. Induktionsschemat består av alla induktionsaxiom (ett för varje A).

Med funktionssymboler i termerna måste vi vara på vår vakt vid substitutuion. Eftersom termer då kan innehålla flera variabler måste vi vara noggranna då vi kontrollerar om en term är fri för en variabel i en formel. Så är t.ex. termen $F(x, x)$ fri för x i $\forall y R_0(x, y)$ men termen $F(x, y)$ är det inte eftersom $F(x, y)$ innehåller en variabel som skulle bli bunden vid substitutionen.

I semantiska träd innebär funktionssymbolerna att vi har fler termer att ta i beaktande vid tillämpning av nedbrytningsregler för kvantifikatorer. Så gäller det t.ex. i det semantiska beviset för $\forall x P(x) \to P(F(c))$ att substituera, inte c utan $F(c)$ för x:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x P(x) \to P(F(c))) \checkmark \\
| \\
\forall x P(x) \\
| \\
\neg P(F(c)) \\
| \\
P(F(c)) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

Funktionssymboler kräver också ett nytt identitetsaxiom:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots y_n)).$$

Om vi sammanställer alla identitetsaxiom har vi:

1. $\forall x \; x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \to x = z)$
4. $\forall x \forall y ((x = y \wedge P_n(x)) \to P_n(y))$
5. $\forall x \forall x' \forall y \forall y' ((x = y \wedge x' = y' \wedge R_n(x, x')) \to R_n(y, y'))$
6. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \to R_i^n(y_1, \ldots y_n))$
7. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots y_n))$

2.12 Isomorfism

Om vi vill ge en modell för en linjär ordning med 5 element kan vi välja heltalen

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5.$$

Men vi kan lika gärna välja fem olika reella tal (t.ex. 0,25, e, π, 4 och $\sqrt{20}$) eller fem abstrakta element $a < b < c < d < e$. Strukturen ser lika ut i alla fall, endast namnen på elementen varierar. Dethär fenomenet uttrycker vi genom att säga att alla modeller ovan är *isomorfa* sinsemellan.

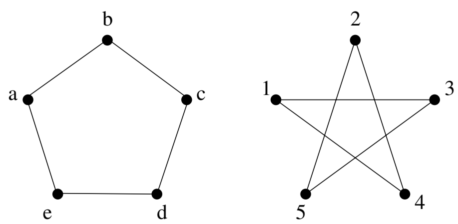
Definition 80. Låt L vara ett lexikon och $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ två L-modeller. En funktion f är en *isomorfism* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ om:

1. f är en bijektion $f : M \to M'$ ($M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ och $M' = \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$)
2. för varje konstantsymbol $c \in L$ gäller
$$f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$$
3. för varje n-ställig relationssymbol $R \in L$ och varje $a_1, \ldots, a_n \in M$ gäller
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \text{ om och endast om } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{M}'}$$
4. för varje n-ställig funktionssymbol $F \in L$ och varje $a_1, \ldots, a_n \in M$ gäller
$$f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$$

Om det finns en isomorfism $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ säger vi att modellerna $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är *isomorfa med varandra.*

Intuitivt uttryckt är två modeller isomorfa om de är likadana i allt annat än namnen på elementen.

Exempel 81. De två graferna i Figur 6 är isomorfa.



Figur 6: Två isomorfa grafer

Vi ser det genom t.ex. isomorfismen f, där

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 5,\ f(d) = 2,\ f(e) = 4$$

för då gäller att alla nodpar i den första grafen avbildas på ett nodpar i den andra så att det första nodparet är grannar om och endast om deras bilder är grannar.

Ur logikens synpunkt är två isomorfa modeller likadana. Det innebär att isomorfa modeller satisfierar samma satser. För att bevisa detta måste vi gå via formler. Deras sanning i givna modeller beror emellertid på tolkningen så vi behöver ett sätt att jämföra tolkningar i isomorfa modeller.

Definition 82. Låt $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ vara två isomorfa L-modeller och f en isomofism $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. Vi säger att en $\mathcal{M}$-tolkning s och en $\mathcal{M}'$-tolkning s' är *konjugater* med avseende på f om $s'(x) = f(s(x))$ för varje variabel x.

Vi kan nu bevisa att om $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är isomorfa och s och s' är konjugater så gäller för alla formler A: $\mathcal{M} \models_s A$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Vi börjar med ett lemma om termer.

Lemma 83. *Låt L vara ett lexikon, $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa L-modeller, s en $\mathcal{M}$-tolkning och s' en $\mathcal{M}'$-tolkning så att $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ är en isomorfism och s och s' är konjugater med avseende på f. Då gäller för varje L-term t:*

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Bevis. Vi bevisar lemmat med induktion över termer.

Fall 1: t är en konstantsymbol c. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = c^{\mathcal{M}'}$. Eftersom f är en isomorfism gäller $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$ så $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Fall 2: t är en variabel x. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x)$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = s'(x)$. Eftersom s och s' är konjugater med avseende på f gäller $f(s(x)) = s'(x)$ så $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Fall 3: t är $F^n(t_1, \ldots, t_n)$ och (induktionshypotes:) påståendet gäller för $t_1, \ldots, t_n$. Då är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$ och $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$. Enligt induktionshypotesen är $f(t_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t_i^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle)$ för varje $1 \leq i \leq n$ och eftersom f är en isomorfism gäller $f((F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) = (F^n)^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle))$. Således har vi

$$\begin{aligned}
f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) &\stackrel{\text{def}}{=} f((F^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\stackrel{f\text{ isom.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\
&\stackrel{\text{ind.hyp.}}{=} (F^n)^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle
\end{aligned}$$

□

Teorem 84. *Låt L vara ett lexikon, $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa L-modeller, s en $\mathcal{M}$-tolkning och s' en $\mathcal{M}'$-tolkning så att $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ är en isomorfism och s och s' är konjugater med avseende på f. Då gäller för varje L-formel A:*

$$\mathcal{M} \models_s A \text{ om och endast om } \mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Bevis. Antag att $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ är en isomorfism. Vi bevisar teoremet med induktion över formeln A för alla $\mathcal{M}$-tolkningar s och $\mathcal{M}'$-tolkningar s' som är konjugater med avseende på f.

I bassteget visar vi teoremet för atomära formler.

Antag att A är formeln $t = t'$ och s och s' är konjugater med avseende på f. Om $\mathcal{M} \models_s A$ så är $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och därmed $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$. Enligt Lemma 83 är då $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$. Alltså gäller $\mathcal{M}' \models_{s'} t = t'$. Omvänt om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ så är $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$. Enligt Lemma 83 är då $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$. Eftersom f är injektiv gäller då $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ och därmed $\mathcal{M} \models_s t = t'$.

Fallet där A är formeln $R^n(t_1, \ldots, t_n)$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

I induktionssteget antar vi som induktionshypotes att $\mathcal{M} \models_s B$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ för alla s och s' som är konjugater med avseende på f. Vi antar också motsvarande egenskap för formeln C.

Om A är $\neg B$ och s och s' är konjugater med avseende på f så gäller $\mathcal{M} \models_s A$ enligt Tarskis sannningsdefinition om och endast om $\mathcal{M} \not\models_s B$. Vidare gäller detta enligt induktionshypotesen om och endast om $\mathcal{M}' \not\models_{s'} B$ dvs. om och endast om (Tarskis sanningsdefinition) $\mathcal{M}' \models_{s'} A$.

Om A är $B \wedge C$ och s och s' är konjugater med avseende på f och $\mathcal{M} \models_s A$ så gäller enligt Tarskis sanningsdefinition $\mathcal{M} \models_s B$ och $\mathcal{M} \models_s C$. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ och $\mathcal{M}' \models_{s'} C$ och igen enligt Tarskis sannignsdefinition $\mathcal{M}' \models_{s'} B \wedge C$. Den andra riktningen bevisas på motsvarande sätt.

Fallen där A är $B \vee C$, $B \to C$ och $B \leftrightarrow B$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren.

Låt sedan A vara $\exists x B$ och s och s' konjugater med avseende på f. Om $\mathcal{M} \models_s A$ så finns det ett $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ så att $M \models_{s(a/x)} B$. Eftersom s och s' är konjugater med avseende på f gäller för alla variabler *förutom* x $f(s(a/x)(y)) = s'(y) = s'(f(a)/x)(y)$. För x gäller $f(s(a/x)(x)) = f(a) = s'(f(a)/x)(x)$. Alltså är $s(a/x)$ och $s'(f(a)/x)$ konjugater med avseedne på f. Enligt induktionshypotesen gäller då $\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$ och eftersom $f(a) \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$ så gäller $\mathcal{M}' \models_{s'} \exists x B$ dvs $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Å andra sidan, om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ så finns det något $b \in \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$ så att $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$. Eftersom f är surjektiv finns det ett $b' \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ så att $f(b') = b$. Vidare är $s(b'/x)$ och $s'(f(b')/x) = s'(b/x)$ konjugater med avseende på f så enligt induktionshypotesen gäller $\mathcal{M} \models_{s(b'/x)} B$. Enligt Tarskis sanningsdefinition gäller då $\mathcal{M} \models_s A$.

Fallet där A är $\forall B$ lämnas som övningsuppgift åt läsaren. $\square$

Korollarium 85. *Om $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ är isomorfa L-modeller och A är en L-sats så gäller*

$$\mathcal{M} \models A \textit{ om och endast om } \mathcal{M}' \models A.$$

Bevis. Antag att $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ är en isomorfism och att $\mathcal{M} \models A$. Det här innebär att $\mathcal{M} \models_s A$ för alla $\mathcal{M}$-tolkninar s. Låt s' vara en godtycklig $\mathcal{M}'$-tolkning. Vi definierar en $\mathcal{M}$-tolkning s'' enligt $s''(x) = f^{-1}(s'(x))$ för varje variabel x (dethär är möjligt eftersom f är bijektiv). Då är s'' och s' konjugater med avseende på f så enligt föregående teorem gäller $\mathcal{M} \models_{s''} A$ om och endast om $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ och eftersom $\mathcal{M} \models_s A$ för varje $\mathcal{M}$-tolkning s så måste $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Eftersom s' var godtycklig gäller således $\mathcal{M}' \models_{s'} A$ för varje $\mathcal{M}'$-tolkning s', dvs $\mathcal{M}' \models A$.

Om å andra sidan $\mathcal{M} \not\models A$ så finns det en $\mathcal{M}$-tolkning s så att $\mathcal{M} \not\models_s A$. Då kan vi definiera en $\mathcal{M}'$-tolkning s' enligt $s'(x) = f(s(x))$. Då är s och s' konjugater med avseende på f så $\mathcal{M}' \not\models_{s'} A$ och således $\mathcal{M}' \not\models A$. $\square$

Korollariet bevisar att det inte går att skilja åt isomorfa modeller med hjälp av predikatlogiska satser. Ur logikens synpunkt är alla isomorfa modeller likadana. En naturlig följdfråga är ifall alla modeller som satisfierar samma satser är isomorfa. Svaret är negativt. Det går att bevisa att t.ex. de linjära ordningarna $(\mathbb{Q}, <)$ och $(\mathbb{R}, <)$ satisfierar samma satser (beviset bygger på sk. Ehrenfeucht-Fraïssé-spel), men eftersom $\mathbb{Q}$ är numrerbar och $\mathbb{R}$ inte så kan de inte vara isomorfa. Däremot är två ändliga linjära ordningar isomorfa om de satisfierar samma satser. Dethär beror på att vi då kan uttrycka hur många elementen är.

Referenser

[1] Kaarlo Reipas. Logiikka 1. Kurskompendium, 2012.

[2] Hannele Salminen and Jouko Väänänen. *Johdatus logiikkaan.* Gaudeamus, 1992.

[3] Jouko Väänänen. Logic one. Kurskompendium, 2013.