Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 8

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 19.3.2014
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 2.4.2014

1. Kuvaile omin sanoin, miltä lauseen $\forall x \forall y(P_0(x) \to P_1(y))$ mallit näyttävät.

2. Osoita, että kaavat $\exists x \exists y A$ ja $\exists y \exists x A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.

3. Osoita, että kaavat $\forall x \forall y A$ ja $\forall y \forall x A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.

4. Osoita, että kaavat $\neg \exists x A$ ja $\forall x \neg A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja.

5. Osoita, että kaavat $\neg \forall x A$ ja $\exists x \neg A$ ovat (loogisesti) ekvivalentteja

6.*Osoita, että kaava $\forall y \exists x A$ on kaavan $\exists x \forall y A$ (looginen) seuraus.

7. Osoita, että kaavat $\exists x \forall y R(x, y)$ ja $\forall y \exists x R(x, y)$ eivät ole (loogisesti) ekvivalentteja.

8. Osoita, että kaavat $\forall x(P_0(x) \vee P_1(x))$ ja $\forall x P_0(x) \vee \forall x P_1(x)$ eivät ole (loogisesti) ekvivalentteja.

9.*Mitkä muuttujien esiintymät seuraavissa kaavoissa ovat vapaita ja mitkä sidottuja?
   a) $\forall x(P_0(x) \to P_1(y))$
   b) $\forall x(xEy \vee yEx)$
   c) $\forall x(\forall y(xEy) \vee \forall z(yEz))$

10.*Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita?
   a) $P_0(x)$
   b) $\forall x P_0(x)$
   c) $\forall x P_0(y)$
   d) $\forall y(\exists x(x < y) \vee \exists x(y < x))$
   e) $\forall y(\exists x(x < y) \vee y < x)$

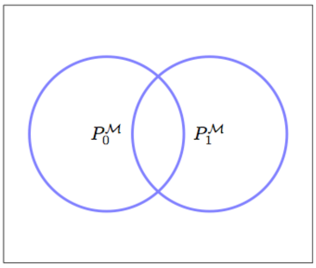
11. Osoita kaavan $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$ määrittelemä joukko kuvan 1 unaarisessa struktuurissa.

12. Osoita kaavan $P_0(x) \leftrightarrow P_1(x)$ määrittelemä joukko kuvan 1 unaarisessa struktuurissa.

13. Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$x > 1 \ \vee \ y < 0$$

määrittelee mallissa $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$.



KUVA 1. Kuva

14. Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$x < 1 \to x = y$$

määrittelee mallissa $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$.

15.*Alkio a on määriteltävä mallissa $\mathcal{M}$ jos joukko $\{a\}$ on määriteltävä $\mathcal{M}$:ssä. Osoita, että 2 on määriteltävä mallissa $(\mathbb{N}, <)$, missä $<$ on luonnollisten lukujen luonnollinen järjestys.

16. Olkoon A kaava ja $\mathcal{M}$ malli. Osoita, että jos s ja s' ovat tulkintafunktioita jotka yhtyvät (siis saavat saman arvon) niillä muuttujilla jotka esiintyvät vapaina kaavassa A, niin s toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$ jos ja vain jos s' toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$. (Ohje: Käytä induktiota kaavan A suhteen.)

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Olkoon L aakkosto $\{P_0, \ldots, P_n\}$. Jos A on propositiolause, jossa esiintyy korkeintaan propositiosymbolit $p_0, \ldots, p_n$, niin olkoon A^* määritelty seuraavasti:

$$\begin{array}{lcl} p_i^* & = & \exists x P_i(x) \\ (\neg A)^* & = & \neg A^* \\ (A \wedge B)^* & = & A^* \wedge B^* \\ (A \vee B)^* & = & A^* \vee B^* \\ (A \to B)^* & = & A^* \to B^* \\ (A \leftrightarrow B)^* & = & A^* \leftrightarrow B^* \end{array}$$

Osoita, että A on toteutuva jos ja vain jos on olemassa L-malli M ja tulkintafunktio s siten että $M \models_s A^*$.