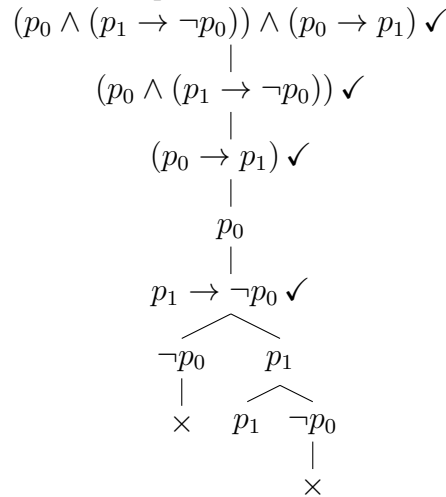


**Logiikka I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto**  
**Kevät 2014**  
**Harjoitus 6**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 19.2.2014  
 Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 19.3.2014

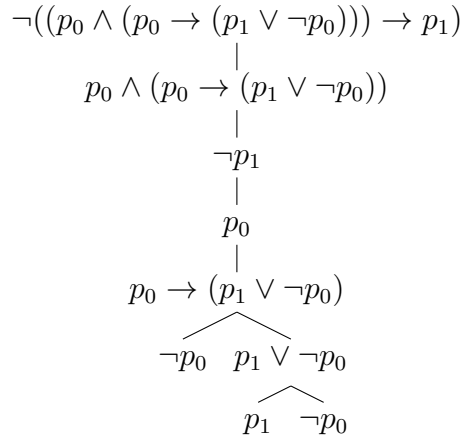
- Käytä semanttista puuta löytääksesi totuusjakauman, joka toteuttaa propositiolauseen  $((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \wedge ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2)) \wedge \neg p_2$ .
- \*Käytä semanttista puuta löytääksesi totuusjakauman, joka toteuttaa propositiolauseen  $(p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$ .
- Tarkastele seuraavaa semanttista puuta:



Puussa on avoin oksa, jonka avulla muodostetaan totuusjakauma  $v(p_0) = v(p_1) = 1$  (ja  $v(p_i) = 1$  muilla  $i$ ). Kuitenkin tällöin  $v((p_0 \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_0)) \wedge (p_0 \rightarrow p_1)) = 0$ . Mikä meni pieleen?

- Käytä semanttista puuta selvittääksesi, onko propositiolause  $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_0)$  toteutuva.
- \*Käytä semanttista puuta selvittääksesi, onko propositiolause  $\neg((p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2))$  toteutuva.
- Käytä semanttista puuta selvittääksesi, onko propositiolause  $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$  toteutuva.
- Huomaa, että propositiolause  $A$  on tautologia, jos ja vain jos  $\neg A$  ei ole toteutuva. Käytä semanttista puuta selvittääksesi onko propositiolause  $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$  tautologia.
- Osoita semanttisen puun avulla, että propositiolause  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$  on tautologia. (Osoita, että lauseen negaatio ei ole toteutuva.) Tätä menetelmää osoittaa lause tautologiaksi kutsutaan semanttiseksi todistukseksi.

9. Analysoi seuraava semanttinen puu: Mitä sääntöjä siinä on käytetty? Miksi oksat sulkeutuvat? Minkä lauseen semanttinen todistus tämä puu on?



10. Anna semanttinen todistus propositiolauseelle  $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ .
11. Anna semanttinen todistus propositiolauseelle  $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$ .
- 12.\* Anna semanttinen todistus propositiolauseelle  $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ .
13. Anna semanttinen todistus propositiolauseelle  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ .
14. Kuinka monella tavalla voit osoittaa, että  $\{p_0 \vee p_1\} \not\vdash p_0 \wedge p_1$ ? Mitkä ovat menetelmät? Esitä ne.
15. Anna esimerkki propositiolauseista  $A$  ja  $B$ , joilla  $\{A \vee B\} \vdash A \wedge B$ .

**Ylimääräinen tehtävä.** Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

16. Kuinka monella tavalla voit osoittaa, että  $\neg(A \vee B)$  ja  $\neg A \wedge \neg B$  ovat loogisesti ekvivalentit? Mitkä ovat menetelmät? Esitä ne.