Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 29.1.2014
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 12.2.2014

Lue kurssimateriaalista luku 1.5 totuusfunktioista. Konjunktiivisesta normaalimuodosta löytyy tietoa esim. kirjasta "Salminen,Väänänen: Johdatus logiikkaan" tai netistä (conjunctive normal form).

1. Formalisoi lauseet
   a) Saatte karkkia, jos olette kiltisti.
   b) Saatte karkkia, vain jos olette kiltisti.
   c) Saatte karkkia, jos ja vain jos olette kiltisti.

   Millä totuusjakaumilla lauseiden totuusarvot ovat yhtenevät ja millä ne poikkeavat toisistaan.

2. Anna esimerkki propositiolauseesta, joka on
   a) tautologia,
   b) kontingentti,
   c) ristiriita.

   Anna perustelu.

3. Anna totuusjakauma, joka osoittaa, että
   a) propositiolause $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_1)$ on toteutuva
   b) propositiolause $(p_0 \rightarrow p_1) \wedge \neg(\neg p_0 \vee p_1)$ on toteutuva
   c) propositiolause $(((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1)$ on kumoutuva
   d) propositiolause $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_0))$ on kumoutuva

   tai todista, ettei sellaista ole olemassa.

4. Onko propositiolause $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ propositiolauseen $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$ looginen seuraus. Entä ovatko propositiolauseet ekvivalentteja? Perustele.

5. Onko propositiolause $((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1)$ propositiolauseen p_0 looginen seuraus. Entä ovatko propositiolauseet ekvivalentteja? Perustele.

6. Keksi kaksi propositiolausetta, jotka eivät ole ekvivalentit, mutta joista toinen on toisen looginen seuraus.

7. Anna jokin positiolause A, johon liittyvä totuusfunktio f_A on:

x_0	x_1	x_2	$f_A(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

8. Olkoon A propositiolause $p_0 \wedge \neg p_0$. Mikä on totuusfunktio f_A?

9.*Ovatko seuraavat lauseet
  (i) disjunktiivisessa normaalimuodossa?
  (ii) konjunktiivisessa normaalimuodossa?
  a) p_0
  b) $p_0 \wedge \neg p_0$
  c) $p_0 \vee \neg p_0$
  d) $(p_0 \wedge p_1) \vee p_0$
  e) $(\neg p_0 \vee p_1) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)$
  f) $p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
  g) $p_0 \vee p_1 \vee p_2$
  h) $(p_0 \wedge p_1) \vee \neg(p_2 \wedge p_1)$

10. Anna disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositionlause A johon liittyvä totuusfunktio f_A on:

x_0	x_1	x_2	$f_A(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

11. Anna konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositionlause A johon liittyvä totuusfunktio f_A on:

x_0	x_1	x_2	$f_A(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

12.*Esitä propostitiolause $(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (\neg p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$
  a) disjunktiivisessa normaalimuodossa
  b) konjunktiivisessa normaalimuodossa

13. **Peircen nuoli** on seuraava konnektiivi:

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Osoita, että $\{\downarrow\}$ on universaalinen konnektiivijoukko. [Vihje: Kurssimateriaalin lause 1.6 ja sen todistus]

14.*Osoita, että $\{\to\}$ ei ole universaalinen konnektiivijoukko. [Vihje: kurssimateriaali]

Seuraavissa tehtävissä tutustutaan päättelyyn. Tehtävien tekemiseen riittää alustava tutustuminen lukuun 1.6.

15. Tarkastellaan seuraavaa "päättelyä":

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B}{A} \qquad \dfrac{A \vee B}{B}}{A \wedge B}$$

a) Löydä päättelyn virheet.
b) Keksi luonnollisen kielen lauseet A ja B, ja selitä näiden avulla, mitä "päättelyssä" tapahtuu.

16. Anna luonnollinen päättely propositiolauseelle $B \wedge A$ propositiolauseesta $A \wedge B$.

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Olkoon A propositiolause ja $p_0, \dots, p_{n-1}$ siinä esiintyvät propositiosymbolit. Olkoon jokaisella $i = 0, \dots, n-1$ annettu jokin propositiolause A_i. Olkoon A' saatu propositiolauseesta A sijoittamalla A_i propositiosymbolin p_i tilalle kaikkialla propositiolauseessa A. Osoita, että jos A on tautologia, niin myöskin A' on. [Vihje: Kun tutkit totuusarvoa $v(A')$ voi olla hyödyksi määritellä toinen totuusjakauma v', jolle $v(A') = v'(A)$.]