Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 12

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 23.4.2014
(ei korjauksia)

Lue kurssimateriaalin luvut 2.19–2.20 n-paikkaisista relaatioista ja funktioista.

1. Anna lauseelle
$$\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \vee R_1(y, x))$$
luonnollinen päättely lauseesta
$$\forall x \forall y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

2. Osoita sopivan seanttisen puun avulla, että lause $\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \to R_0(y, x))$ on validi.

3. Tarkastellaan lausetta:
$$(\forall x R_0^3(x, c, d) \vee \forall y P_0(y)) \to \forall x (R_0^3(x, c, d) \vee P_0(F_0^1(x))).$$
Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

4. Tarkastellaan lausetta:
$$\forall x R_0(F_0^1(x), x) \vee \exists x \neg R_0(x, F_0^1(x)).$$
Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

5. Seuraavassa "päättelyssä" lauseelle $\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)$ lauseesta $\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)$ on virhe:
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}{\forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}\ \forall\,\mathbf{E}}{\exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \exists\,\mathbf{I}}{\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \forall\,\mathbf{I}$$
Mikä virhe?

6. Rakenna semanttisen puun avulla malli lauseelle
$$\forall x R_0(x, F_0^1(x)) \vee \neg \forall x R_0(x, x).$$

7. Olkoon L aakkosto, joka koostuu vakiosymbolista c ja 1-paikkaisesta funktiosymbolista F. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, jonka universumi on $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ja jolla $c^{\mathcal{M}} = 0$ ja $F^{\mathcal{M}}(a) = a + 1$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Mitkä kokonaisluvut ovat vakiotermien tulkintoja? (Vakiotermi on termi, jossa ei esiinny muuttujia, esim. c tai $F(c)$.)

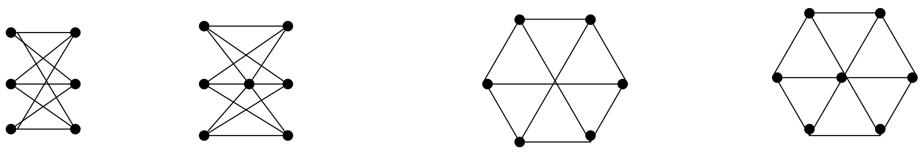
8. Olkoon $L = \{F_0^1\}$. Osoita aakkoston L termeille t joissa esiintyy vain muuttuja x_1:

$$\forall x_1 \forall y_1 (x_1 = y_1 \to t = t'),$$

missä t' on saatu termistä t korvaamalla x_1 muuttujalla y_1. Käytä identiteettiaksioomeja I1-I7 ja luonnollista päättelyä, tai vaihtoehtoisesti semanttista todistusta.

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luvut 2.21–2.22 isomorfismista.

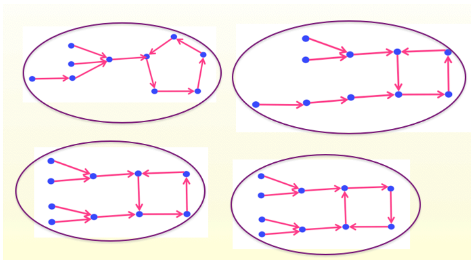
9. Mitkä seuraavista verkoista ovat isomorfisia keskenään?



10. Osoita, että jos verkko $\mathcal{M}$ on isomorfinen verkon $\mathcal{M}'$ kanssa ja edelleen $\mathcal{M}'$ on isomorfinen verkon $\mathcal{M}''$ kanssa, niin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}''$ ovat isomorfiset.

11. Osoita: jos verkko $\mathcal{G}$ on isomorfinen mallin $\mathcal{M}$ kanssa, niin $\mathcal{M}$ on myös verkko.

12. Mitkä seuraavista malleista, missä kussakin on yksi unaarinen (1-paikkainen) funktio, ovat isomorfiset keskenään?



13. Olkoon $\mathcal{M}$ malli ja s tulkintafunktio $\mathcal{M}$:lle. Olkoon f isomofismi $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi tulkintafunktio s'mallille $\mathcal{M}'$ siten että s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen.

14. Osoita, että seuraavat järjestetyt joukot ovat kaikki keskenään ei-isomorfisia:
   a) Kokonaislukujen järjestys.
   b) Luonnollisten lukujen järjestys.
   c) Rationaalilukujen järjestys.
   d) Reaalilukujen järjestys. (Tämä tapaus on hieman erilainen. Onko ylinumeroituvan ja numeroituvan joukon ero tuttu asia sinulle?)

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Osoita, että 2 ei ole määriteltävä mallissa $(\mathbb{Z}, <)$. (määritelävän alkion määritelmä tehtävässä 8.15)(Vihje: Jos f on isomorfismi mallilta itselleen, mitä se tekee mallin määriteltäville joukoille?)