Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2014
Harjoitus 11

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 9.4.2014
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 23.4.2014 (vain yksi korjauskierros)

Lue kurssimateriaalin luku 2.15 aksioomeista ja teorioista.

1. Päättele
$$\forall x(P(x) \to \exists y(x = y \wedge P(y))).$$

2. Päättele
$$\forall x(\exists z R_0(x, z) \to \forall y(x = y \to \exists z R_0(y, z))).$$

3. Päättele
$$\exists x \exists y \forall z(z = x \vee z = y) \to \forall x \forall y \forall z(x = y \vee y = z \vee x = z).$$

4.* Päättele järjestysaksioomeista
$$\forall x \forall y \forall z(x < y \to (z < y \vee x < z))$$

5. Päättele järjestysaksioomeista
$$\forall x \forall x'((\forall y(y < x \vee y = x) \\ \wedge \forall y(y < x' \vee y = x')) \to x = x')$$
(Suurin alkio on yksikäsitteinen, jos sellainen on olemassa).

6. Päättele verkkoteorian aksioomeista
$$\forall x \forall y(xEy \to \neg x = y).$$

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luvut 2.16–2.17 semanttisista puista.

7. Laadi semanttinen puu kaavalle
$$\exists x(A \wedge \neg B) \wedge \forall x(A \to B)$$

8. Anna semanttinen todistus kaavalle
$$\exists x \forall y(R_0(x, y) \vee P_0(x)) \to \forall y \exists x(P_0(x) \vee R_0(x, y))$$

9.* Anna semanttinen todistus kaavalle
$$\exists x \forall y \neg R_0(x, y) \to \exists x \neg \exists y R_0(x, y)$$

10. Etsi semanttisen puun menetelmällä malli lauseelle
$$\forall x \exists y \forall z(R_0(x, y) \wedge R_0(y, z) \wedge \neg \forall x \forall y R_0(x, y)).$$
Huomaa, että olisi kyllä muitakin menetelmiä mallien löytämiseksi, kuten vaikkapa puhdas kokeilu.

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssimateriaalin luku 2.18 validisuudesta.

11. Tarkastellaan kaavaa:

$$(R_0(x, y) \vee \forall x P(x)) \rightarrow \forall x(R_0(x, y) \vee P(x)).$$

Onko kaava validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai sopivalla semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla,jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

12.* Selvitä, onko seuraava lause validi, kontingentti vai ristiriitainen:

$$\exists x P_0(x) \rightarrow \forall x P_0(x)$$

Perustele.

Ylimääräinen tehtävä. Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

13. Päättele järjestyksen aksioomeista

$$\begin{aligned} &\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n) \\ &\rightarrow \exists x \forall y(x < y \vee x = y) \end{aligned}$$

(Jos järjestys on äärellinen, siinä on pienin alkio.) (Vihje: tämä on todella haastava tehtävä; ideana on rakentaa päättely induktiivisesti, mutta induktiota varten on ensin löydettävä toinen muotoilu, jota voi käyttää induktioaskeleessa)