Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

7.4.2014

n-paikkaiset relaatiot

- tähän mennessä yksipaikkaisia predikaattisymboleita (P) ja kaksipaikkaisia (R) relaatiosymboleita
- paikkaluku voi olla mikä tahansa (positiivinen) luonnollinen luku
- jotta symbolista tiedettäisiin, minkä paikkaluvun relaatiota se vastaa, kirjoitetaan n-paikkaiset relaatiosymbolit

$$R_0^n, R_1^n, \ldots$$

- n–paikkaisen relaatiosymbolin tulkinta on n-paikkainen relaatio

$$(R_i^n)^{\mathcal{M}} \subseteq M^n.$$

n-paikkaisten relaatiosymboleiden vaikutus

- muotoa $R^n(t_1, \ldots, t_n)$ olevat atomikaavat
- uudet identiteettiaksioomat:

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \\
&\qquad ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to R_i^n(y_1, \ldots, y_n))
\end{aligned}
$$

Funktiot

- n-paikkaiset funktiosymbolit

$$F_0^n, F_1^n, \ldots$$

  (käytännössä usein $F, F', G, G', \ldots$)
- n–paikkaisen funktiosymbolin tulkinta on n-paikkainen funktio

$$(F_i^n)^{\mathcal{M}} : M^n \to M.$$

Esimerkki

Olkoon $L = \{F_0^2\}$. Tällöin esimerkki L-struktuurista on

$$\mathcal{M} = (\mathbb{N}, (F_0^2)^{\mathcal{M}}),$$

missä $(F_0^2)^{\mathcal{M}}(m, n) = m + n$.

Yleensä kyseinen struktuuri merkitään $(\mathbb{N}, +)$.

L-termit

Määritelmä

Olkoon L aakkosto. Tällöin L-termit saadaan seuraavasti:

1. muuttujasymbolit x_i ovat L-termejä
2. jos $c_i \in L$ on vakiosymboli, niin c_i on L-termi
3. jos $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä, ja $F_i^n \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli, niin

$$F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$$

on L-termi

Esimerkkejä termeistä

- x_4
- c_2
- $F_1^2(x_1, x_2)$
- $F_0^2(F^1(x_0), c_2)$
- $F_0^1(F_0^2(F_1^1(x_0), c_1))$
- tutummalla notaatiolla: $x^2 + 2x + 3$, $cos(y)$, $sin(x^2 - 1)$

Atomikaavat kuten ennen, mutta...

- $t_1 = t_2$, esim. $F_7^1(x_0) = F_0^2(F_0^1(c_0), c_1)$
- $R_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, esim. $R_0^3(x_0, F_0^1(x_0), F_0^1(F_0^1(x_)))$

Tutummalla notaatiolla:

- $x^3 - 3x^2 + x = 0$
- $cos(x) = cos(y)$
- $xy^{-1} = 1$

Termin tulkinta

Määritelmä

Jos t on L-termi, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, termin t tulkinta määritellään seuraavasti:

1. Jos $t = x_i$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = x_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i)$.
2. Jos $t = c_i$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.
3. Jos $t = F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle =$

$$F_i^n(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = (F_i^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle).$$

Esimerkki

Olkoon $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, F^{\mathcal{M}}, G^{M}, c_0^{M}, c_1^{\mathcal{M}})$, missä $F^{\mathcal{M}}(m) = m + 1$, $G^{\mathcal{M}}(m, n) = m + n$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ ja $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Päteekö

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x, y),$$

kun $s(x) = 0$ ja $s(y) = 2$.

Esimerkki: ryhmä

Tarkastelemme ryhmää aakkostossa $L = \{\circ, e\}$ (yksinkertaisuuden vuoksi lisäämme neutraalialkiolle vakiosymbolin; tämä on sinänsä turhaa, sillä neutraalialkio on määriteltävä ryhmässä). Ryhmän aksioomat ovat

1. $\forall x \forall y \forall z (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2. $\forall x (x \circ e = x \wedge e \circ x = x)$
3. $\forall x \exists y (x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$

Huomaa, että ryhmäaksiooma G0 "kaikilla $a, b \in G$ pätee $a \circ b \in G$" seuraa siitä, että $\circ$ on funktiosymboli, jolloin sen tulkinnan on oltava totaali funktio G:ssä.

Esimerkki: seuraajafunktio

Seuraajafunktion aakkosto on $\{F_0^1, c_0\}$, mutta se kirjoitetaan yleensä $\{S, 0\}$. Seuraajafunktion teorian aksioomat ovat

- $\forall x \neg S(x) = 0$
- $\forall x(\neg x = 0 \rightarrow \exists y S(y) = x)$
- $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
- induktioskeema:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n((A(0/x_0) \land \forall x_0(A \rightarrow A(S(x_0)/x_0))) \rightarrow \forall x_0 A)$$

Varoitus

Sijoituksessa oltava tarkkana; funktioiden takia muotoilu "t vapaa muuttujalle x kaavassa A, jos t ei *sisällä* yhtään muuttujaa, joka tulisi sidotuksi, kun t sijoitetaan x:n vapaisiin esiintymiin kaavassa A"

$F(x, x)$ on vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y R_0(x, y)$

$F(x, y)$ ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y R_0(x, y)$

Funktioiden vaikutuksia

- enemmän termejä semanttisissa puissa
  esim: osoita, että $\forall x P(x) \to P(F(c))$ on validi
- uudet identiteettiaksioomat:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \\ \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots, y_n)).$$