Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

28.3.2014

Korjaus kurssimateriaaliin

Kurssimateriaalin lemma 2.19 (sijoituslemma):
Jos x on vapaa muuttujalle y A:ssa, niin silloin seuraavat ovat yhtäpitäiviä:

1. $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A(x/y)$

ei päde annetussa muodossa, vaan on esim. oletettava $a = s(x)$.

Sijoituslemma

Lemma

Olkoon L aakkosto, A L-kaava ja t L-termi. Jos t on vapaa muuttujalle x kaavassa A, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s:

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, *missä* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Maanantain esimerkki: $\{\exists x \forall y R(x,y)\} \vdash \forall y \exists x R(x,y)$

$$
\dfrac{\exists x \forall y R(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y R(x,y)]^1}{R(x,y)}\ \forall\text{ E, h1}}{\exists x R(x,y)}\ \exists\text{ T, h2}}{\forall y \exists x R(x,y)}\ \forall\text{ T, h3}}{\forall y \exists x R(x,y)}\ \exists\text{ E, 1, h4}
$$

h1: y vapaa y:lle kaavassa $R(x,y)$
h2: x vapaa x:lle kaavassa $R(x,y)$
h3: y ei esiinny vapaana oletuksessa $\exists x \forall y R(x,y)$
h4: x ei esiinny vapaana kaavassa $\forall y \exists x R(x,y)$ eikä muissa oletuksissa kuin kaavassa $\forall y R(x,y)$.

Miksi toinen suunta ei onnistu?

Miksi toinen suunta ei onnistu?

Miten osoitetaan, ettei se onnistu?

Eheyslause

Lause (Eheyslause)

Olkoon L aakkosto. Jos S on joukko L-kaavoja, A on L-kaava ja $S \vdash A$, niin A on joukon S looginen seuraus.

Vertailu

Propositiologiikka

Jos S on joukko propositiolauseita, A on propositiolause ja $S \vdash A$, niin $S \Rightarrow A$.

Osoitetaan, että jos jokin *totuusjakauma* toteuttaa oletukset, se toteuttaa myös johtopäätöksen.

Predikaattilogiikka

Jos S on joukko L-kaavoja, A on L-kaava ja $S \vdash A$, niin $S \Rightarrow A$.

Osoitetaan, että jos L-malli $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s toteuttavat oletukset, ne toteuttavat myös johtopäätöksen.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus

Todistus induktiolla.

1. Jos $\mathcal{P}$ on triviaali päättely A, niin A on sekä oletus että johtopäätös. Näin ollen, jos malli $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktio s toteuttavat päättelyn oletukset (eli A:n), niin ne toteuttavat johtopäätöksen A.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

2. Tarkastellaan päättelyä

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P} & & \mathcal{Q} \\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge\mathrm{T}$$

ja oletetaan, että päättelyt $\begin{matrix}\mathcal{P} \\ A\end{matrix}$ ja $\begin{matrix}\mathcal{Q} \\ B\end{matrix}$ toteuttavat induktio-oletuksen: Mikä tahansa L-malli $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s, joka toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ (tai päättelyn $\mathcal{Q}$) oletukset toteuttaa myös kaavan A (tai B).

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

Olkoon $\mathcal{M}$ ja s sellainen L-malli ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, että ne toteuttavat tarkasteltavan päättelyn oletukset. Tällöin ne toteuttavat päättelyiden $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ oletukset. Induktio-oletuksen nojalla

$$\mathcal{M} \models_s A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M} \models_s B$$

joten Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$$\mathcal{M} \models_s A \wedge B.$$

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

3–11 Muut konnektiivisäännöt vastaavasti.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

12. Tarkastellaan päättelyä

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x A\end{array}}{A(t/x)}\ \forall\,\mathrm{E}$$

missä t on vapaa x:lle A:ssa ja päättely $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x A\end{array}$ on ehyt.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

Olkoon $\mathcal{M}$ ja s sellainen L-malli ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, että ne toteuttavat tarkasteltavan päättelyn oletukset. Tällöin ne toteuttavat päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \forall x A$. Siten kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, joten erityisesti

$$\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle/x)} A.$$

Koska t on vapaa muuttujalle x A:ssa, sijoituslemman nojalla

$$\mathcal{M} \models_s A(t/x).$$

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

13. Olkoon $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ päättely, jossa x ei esiinny vapaana missään oletuksessa. Tehdään induktio-oletus, että $\mathcal{P}$ on ehyt ja tarkastellaan päättelyä

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{\forall x A}\ \forall\mathrm{T}$$

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

Olkoon $\mathcal{M}$ ja s sellainen L-malli ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, että ne toteuttavat tarkasteltavan päättelyn oletukset ja siten päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset. Olkoon $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ mielivaltainen. Koska x ei esiinny vapaana päättelyn $\mathcal{P}$ oletuksissa, myös tulkintafunktio $s(a/x)$ toteuttaa päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset (HT 8:16). Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ ja koska a oli mielivaltainen $\mathcal{M} \models_s \forall x A$.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

14. Oletetaan induktio-oletuksena, että päättely $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x)\end{matrix}$, missä t on vapaa x:lle A:ssa, on ehyt. Tarkastellaan päättelyä

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A(t/x)\end{matrix}}{\exists x A} \leftrightarrow \top$$

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

Olkoon $\mathcal{M}$ ja s sellainen L-malli ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, että ne toteuttavat tarkasteltavan päättelyn oletukset ja siten päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$. Sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_{s(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle/x)} A$. Koska $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M} \models_s \exists x A$.

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

15. Oletetaan induktio-oletuksena, että päättelyt $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists xA\end{array}$ ja $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ ovat ehyitä ja että x ei esiinny vapaana B:ssä tai päättelyn $\mathcal{Q}$ muissa oletuksissa kuin A:ssa. Tarkastellaan päättelyä

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists xA\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]^1\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}}{B}\ \exists\,\mathrm{E},\,1$$

Predikaattilogiikan eheyslauseen todistus (jatk.)

Olkoon $\mathcal{M}$ ja s sellainen L-malli ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, että ne toteuttavat tarkasteltavan päättelyn oletukset. Tällöin ne toteuttavat päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \exists x A$. Siis on olemassa $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, jolla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$. Siten $\mathcal{M}$ ja $s(a/x)$ toteuttavat A:n. Koska s toteuttaa muut $\mathcal{Q}$:n oletukset ja x ei esiinny niissä vapaana, $\mathcal{M}$ ja $s(a/x)$ toteuttavat kaikki $\mathcal{Q}$:n oletukset (HT 8:16). Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Koska x ei esiinny vapaana B:ssä, myös $\mathcal{M} \models_s B$.