Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

24.3.2014

Predikaattilogiikan päättely

- kaikki propositiologiikan päättelysäännöt (sovellettuna predikaattilogiikan kaavoihin)
- uusina kvanttoreiden tuonti- ja eliminointisäännöt

Sijoituslemman seurauksia

Seuraus

$$\forall x A \Rightarrow A(t/x)$$

Seuraus

$$A(t/x) \Rightarrow \exists x A.$$

Universaalikvanttorin eliminointi

Sääntö:

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)}\ \forall\,\mathrm{E}$$

Ehto: termi t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Ehdon tarpeellisuus

Ilman ehtoa “t vapaa muuttujalle x” seuraava päättely olisi mahdollinen:

$$\frac{\forall x \exists y \, \neg x = y}{\exists y \, \neg y = y}$$

eli jos mallissa on vähintään kaksi alkiota, niin on olemassa alkio, joka ei ole yhtäsuuri itsensä kanssa.

Eksistenssikvanttorin tuonti

Sääntö:

$$\frac{A(t/x)}{\exists x A}\ \exists\mathrm{T}$$

Ehto: termin t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Ehdon tarpeellisuus

Ilman ehtoa "t vapaa muuttujalle x" seuraava päättely olisi mahdollinen:

$$\frac{\forall y \neg yEy}{\exists x \forall y \neg xEy}$$

eli jos mikään solmu ei ole oma naapurinsa, niin jollakin solmulla ei ole yhtään naapuria.

Esimerkki

Anna päättely $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists y P(y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)}{P(y)}\ \forall \mathrm{E}}{\exists y P(y)}\ \exists \mathrm{T}$$

Universaalikvanttorin eliminoinnissa y on vapaa x:lle kaavassa $P(x)$.
Eksistenssikvanttorin tuonnissa y on vapaa y:lle kaavassa $P(y)$.

Universaalikvanttorin tuonti

Säänto:

$$\frac{A}{\forall x A} \forall \mathrm{T}$$

Ehto: x ei esiinny vapaana missään kaavan A päättelyn hylkäämättömässä oletuksessa

- Motivaatio: "jos x:stä ei ole oletettu mitään, niin se, mitä x:stä pätee, pätee kaikille alkioille"
- tämä sääntö itsessään ei (yleensä) ole sallittu päättely

Esimerkki

Anna päättely $\{\forall x R(x,z)\} \vdash \forall y R(y,z)$.

$$\cfrac{\cfrac{\forall x R(x,z)}{R(y,z)}\ \forall\,\mathrm{E}}{\forall y R(y,z)}\ \forall\,\mathrm{T}$$

Universaalikvanttorin eliminoinnissa y on vapaa x:lle kaavassa $R(x,z)$.
Universaalikvanttorin tuonti on sallittu, koska y ei esiinny vapaana päättelyn oletuksessa.

Eksistenssikvanttorin eliminointi

Sääntö:

$$\dfrac{\exists x A \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B}\ \exists\,\mathrm{E}$$

Ehto: x ei esiinny vapaana kaavassa B eikä missään B:n päättelyn hylkäämättämässä oletuksessa, paitsi A:ssa

Ehdon tarpeellisuus

Ilman ehtoa "x ei esiinny vapaana kaavassa B" seuraava päättely olisi mahdollinen:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P_0(x) \qquad [P_0(x)]}{P_0(x)}}{\forall x P_0(x)}$$

eli jos jokin pallo on sininen, niin kaikki pallot ovat sinisiä.

Esimerkki

Päättele: $\{\exists x P_0(x), \forall y(P_0(y) \to P_1(y))\} \vdash \exists x P_1(x)$

$$\dfrac{\exists x P_0(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y(P_0(y) \to P_1(y))}{P_0(x) \to P_1(x)}\,\forall\text{ E, h1} \qquad [P_0(x)]^1}{P_1(x)}\,\to\text{ E}}{\exists x P_1(x)}\,\exists\text{ T, h2}}{\exists x P_1(x)}\,\exists\text{ E, 1, h3}$$

huom1: x on vapaa y:lle kaavassa $P_0(y) \to P_1(y)$.
huom2: x on vapaa x:lle kaavassa $P_1(x)$.
huom3: x ei esiinny vapaana kaavassa $\exists x P_1(x)$ eikä päättelyn muissa oletuksissa kuin kaavassa $P_0(x)$.

Mitä teen, jos t ei ole vapaa muuttujalle x?

- sijoitus $A(t/x)$ (ja säännöt, joissa tämä esiintyy) sallittu, vain jos t vapaa muuttujalle x
- jos termi ei ole vapaa muuttujalle, täytyy sidotut muuttujat vaihtaa
- sidottujen muuttujien vaihtaminen ei ole päättelysääntö – täytyy päätellä erikseen

Esimerkki

Päätellään $\forall y(R(y,z) \wedge P(y))$ kaavasta $\forall x(R(x,z) \wedge P(x))$.

Menetelmällä voidaan yleisemmin päätellä $\forall y\, A(y/x)$ kaavasta $\forall x\, A$, jos y *ei esiinny kaavassa* A.

Esimerkki

Päätellään $\exists y R(y, y)$ kaavasta $\exists x R(x, x)$.

Menetelmällä voidaan yleisemmin päätellä $\exists y\, A(y/x)$ kaavasta $\exists x\, A$, jos y *ei esiinny kaavassa* A.