Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

21.3.2014

Määriteltävä (kaksipaikkainen) relaatio

Määritelmä

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. Relaatio $R \subseteq M^2$ on *määriteltävä relaatio mallissa* $\mathcal{M}$, jos on olemassa L-kaava A, jossa vain x_0 ja x_1 esiintyvät vapaina, ja jolla

$$R = \{(a, b) \in M^2 : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \text{ joilla } s(x_0) = a \text{ ja } s(x_1) = b\}.$$

Tällöin A *määrittelee* R:n mallissa $\mathcal{M}$.

Kaava määrittelee relaation, joka koostuu kaikista kaavaa toteuttavista alkiopareista.

Projektiot

Jos R on kaksipaikkainen relaatio, niin

1. *ensimmäinen projektio* relaatiosta on niiden alkioiden a joukko, joilla pari (a, b) kuuluu relaatioon R jollakin b,
2. *toinen projektio* relaatiosta on niiden alkioiden b joukko, joilla pari $(a, b) \in R$ jollakin a.

Projektiot

Esimerkki

Olkoon R allaoleva joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaatio. Oletamme, että R on määriteltävä jollakin kaavalla A.

5	•	•	•	•	•
4	•	•	•	×	×
3	•	•	×	×	×
2	•	×	×	×	•
1	•	•	×	×	×
	1	2	3	4	5

5	•	•	•	•	•
4	•	•	•	×	×
3	•	•	×	×	×
2	•	×	×	×	•
1	•	•	×	×	×
	1	2	3	4	5

Esimerkki

1. Relaation ensimmäinen projektio on joukko $\{2, 3, 4, 5\}$. Mikä kaava määrittelee tämän joukon?

5	•	•	•	•	•
4	•	•	•	×	×
3	•	•	×	×	×
2	•	×	×	×	•
1	•	•	×	×	×
	1	2	3	4	5

Esimerkki

2. Relaation toinen projektio on joukko $\{1, 2, 3, 4\}$. Mikä kaava määrittelee tämän joukon?

Sijoitus

Jos A on L-kaava, jossa x esiintyy vapaana, A “sanoo” jotakin x:stä.

Kun haluamme “sanoa” vastaavan asian L-termistä t, sijoitamme t:n x:n vapaisiin esiintymiin.

Esimerkki

Kaava

$$\exists z\, x < z$$

"sanoo", että on olemassa x:ää suurempi alkio.

Esimerkki

Kaava

$$\exists z\, x < z$$

“sanoo”, että on olemassa x:ää suurempi alkio.

Miten sanotaan, että on olemassa y:tä suurempi alkio?

Esimerkki

Kaava

$$\exists z\, x < z$$

"sanoo", että on olemassa x:ää suurempi alkio.

Miten sanotaan, että on olemassa y:tä suurempi alkio?

Entä z:aa suurempi alkio?

Sidottujen muuttujien vaihtaminen

Sidottujen muuttujien tulkinta ei vaikuta kaavan toteutumiseen.

Sidotut muuttujat voidaan vaihtaa, ilman että merkitys muuttuu.

Esimerkiksi kaavat

$$\forall x R_0(x, y) \quad \text{ja} \quad \forall z R_0(z, y)$$

ovat ekvivalentit.

Sidottujen muuttujien vaihtaminen

Jos kaava $\exists z\, x < z$ sanoo, että on olemassa x:ää suurempi alkio, miten sanotaan, että on olemassa z:aa suurempi alkio?

Sidottujen muuttujien vaihtaminen

Jos kaava $\exists z\, x < z$ sanoo, että on olemassa x:ää suurempi alkio, miten sanotaan, että on olemassa z:aa suurempi alkio?
Ratkaisu:
Vaihdetaan kaava $A = \exists z\, x < z$ ekvivalenttiin kaavaan

$$A' = \exists y\, x < y$$

ja sijoitetaan z x:n tilalle uudessa kaavassa.

$$\exists y\, z < y$$

Sidottujen muuttujien vaihtaminen

Sidottuja muuttujia vaihdettaessa on varottava, ettei sidota uusia muuttujia. Esimerkiksi

$$\forall x R_0(x, y) \quad \text{ja} \quad \forall y R_0(y, y)$$

eivät ole ekvivalentit.

Vapaa muuttujalle

Määritelmä

L-termi t on *vapaa muuttujalle* x *kaavassa* A, jos t ei sisällä yhtään muuttujaa, joka tulisi sidotuksi, kun t sijoitetaan x:n vapaisiin esiintymiin kaavassa A.

Käytännössä (kurssin tässä vaiheessa) t on vapaa muuttujalle x kaavassa A, jos t ei ole muuttuja, joka tulisi sidotuksi kun se sijoitetaan x:n vapaisiin esiintymiin.

Esimerkki

y ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa

$$\forall y R(x, y)$$

koska y:n sijoittaminen x:n vapaaseen esiintymään antaisi kaavan

$$\forall y R(y, y)$$

Määritelmä

Olkoon L aakkosto, A L-kaava ja t L-termi. Notaatio

$$A(t/x)$$

tarkoittaa kaavaa, joka saadaan, kun x:n vapaisiin esiintymiin sijoitetaan termi t.

Merkintää käytetään vain, kun sijoitus on sallittu, eli kun t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Esimerkki 1

Esimerkki

z on vapaa muuttujalle x kaavassa

$$A_1 = R(x, y) \wedge \forall y R(x, y)$$

ja

$$A_1(z/x) = R(z, y) \wedge \forall y R(z, y).$$

Esimerkki 2

Esimerkki

z ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa

$$\exists z R(x, z) \wedge \forall y R(x, y)$$

koska sijoitus antaisi

$$\exists z R(z, z) \wedge \forall y R(z, y)$$

jossa x:n vapaa esiintymä on muuttunut z:n sidotuksi esiintymäksi.

Esimerkki 3

Esimerkki

Vakiot ovat vapaita kaikille muuttujille kaikissa kaavoissa, koska ne eivät sisällä muuttujia, jotka voisi tulla sidotuiksi.

Sijoituslemma

Lemma

Olkoon L aakkosto, A L-kaava ja t L-termi. Jos t on vapaa muuttujalle x kaavassa A, niin SEOY kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s:

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$, *missä* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Todistus HT.

Sijoituslemman seurauksia

Seuraus

$$\forall x A \Rightarrow A(t/x)$$

Seuraus

$$A(t/x) \Rightarrow \exists x A.$$

Todistus Tarksin totuusmääritelmää käyttäen.