Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

14.3.2014

Notaatiosta

$\mathrm{dom}(\mathcal{M})$ tarkoittaa mallin $\mathcal{M}$ universumia. Siis jos

$$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}),$$

niin $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = M$.

Notaatiosta

Virallisesti	**Käytännössä**
$x_0, x_1, x_2, \ldots$	$x, y, z, \ldots$
P_0	P
$R_0, R_1, \ldots$	$R, <, E, \ldots$
$c_0, c_1, \ldots$	$c, d, e, \ldots, 0, 1, 2, \ldots$

Sulkeista

Tällä kurssilla kaavat on määritelty niin, että vain kaksipaikkaiset konnektiivit edellyttävät sulkumerkkejä. Siispä

- $x = y$
- $\forall x\, x = x$
- $\neg x = y$

ovat kaavoja.

Aakkosto vs. malli

aakkosto L	L-**malli** $\mathcal{M}$
symbolit (nimet)	joukot, relaatiot, alkiot
P	$P^{\mathcal{M}} \subset \mathrm{dom}(\mathcal{M})$
R	$R^{\mathcal{M}}$
c_0	$c_0^{\mathcal{M}} \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$

Aakkosto vs. malli, esimerkki

Jos aakkosto $L = \{<\}$, L-malleissa on *tulkinta relaatiolle* $<$. Yleensä se tulkitaan järjestysrelaatioksi, mutta näitähän on useita, esim:

$$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{M}_1})$$
$$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, <^{\mathcal{M}_2})$$
$$\mathcal{M}_3 = (\mathbb{Q}, <^{\mathcal{M}_3})$$
$$\mathcal{M}_4 = (\mathbb{R}, <^{\mathcal{M}_4})$$

missä
$<^{\mathcal{M}_1}$ on luonnollisten lukujen järjestys,
$<^{\mathcal{M}_2}$ on kokonaislukujen järjestys,
$<^{\mathcal{M}_3}$ on rationaalilukujen järjestys,
$<^{\mathcal{M}_4}$ on reaalilukujen järjestys.

Aakkosto vs. malli, yleisempi esimerkki

Jos aakkosto $L = \{R\}$, L-malleissa on *tulkinta relaatiolle* R. Tämä tulkinta voi olla esim.

- jokin edellisistä järjestysrelaatioista
- verkon särmät
- relaatio "x on y:n isä"
- jaollisuusrelaatio

Tarskin totuusmääritelmä, atomikaavat

Määritelmä

Kaavan A toteutuminen tulkintafunktiolla s mallissa $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models_s A$) määritellään seuraavasti:

1. $\mathcal{M} \models_s t_1 = t_2$, joss
$$t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle.$$
2. $\mathcal{M} \models_s R_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, joss
$$(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in (R_i^n)^{\mathcal{M}}.$$

Tarskin totuusmääritelmä, konnektiivit

Määritelmä

3. $\mathcal{M} \models_s \neg A$, joss $\mathcal{M} \not\models_s A$.
4. $\mathcal{M} \models_s (A \wedge B)$, joss ($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$).
5. $\mathcal{M} \models_s (A \vee B)$, joss ($\mathcal{M} \models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).
6. $\mathcal{M} \models_s (A \rightarrow B)$, joss ($\mathcal{M} \not\models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).
7. $\mathcal{M} \models_s (A \leftrightarrow B)$, joss [($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$) tai ($\mathcal{M} \not\models_s A$ ja $\mathcal{M} \not\models_s B$)].

Tarskin totuusmääritelmä, kvanttorit

Määritelmä

8. $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$, joss $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ kaikilla $a \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$.
9. $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$, joss $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ jollakin $a \in \operatorname{dom} \mathcal{M}$.

Totuus

Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models_s A$$

Kaava A on *tosi mallissa* $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models A$$

jos $\mathcal{M} \models_s A$ kaikilla $\mathcal{M}$tulkintafunktioilla s.

L-kaava A on *validi*:

$$\models A$$

jos $\mathcal{M} \models A$ kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$.

Valideja kaavoja

- $x = x$
- $x = y \to y = x$
- $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$
- $R(x, y) \to \exists z R(x, z)$

Tautologia

Predikaattilogiikassa tautologia on lause, jolla on propositiologiikan tautologian muoto, mutta alikaavat ovat predikaattilogiikan kaavoja, esim:

- $(R(x,y) \vee \neg R(x,y))$
- $(P(x) \wedge (R(x,y) \vee R(y,z))) \leftrightarrow ((P(x) \wedge R(x,y)) \vee (P(x) \wedge R(y,z)))$
- $(P_0(x) \rightarrow P_1(x)) \rightarrow (\neg P_1(x) \rightarrow \neg P_0(x))$

Tautologia

Predikaattilogiikassa tautologia on lause, jolla on propositiologiikan tautologian muoto, mutta alikaavat ovat predikaattilogiikan kaavoja, esim:

- $(R(x,y) \vee \neg R(x,y))$
- $(P(x) \wedge (R(x,y) \vee R(y,z))) \leftrightarrow ((P(x) \wedge R(x,y)) \vee (P(x) \wedge R(y,z)))$
- $(P_0(x) \to P_1(x)) \to (\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$

Kaikki tautologiat ovat valideja, muttei toisinpäin.

Toteutuvuus,kumoutuvuus, jne

Kaava A on *toteutuva*, jos $\mathcal{M} \models_s A$ jollakin $\mathcal{M}$ ja s.

Kaava A on *kumoutuva*, jos $\mathcal{M} \not\models_s A$ jollakin $\mathcal{M}$ ja s.

Jos A ei ole toteutuva, se on ristiriitainen.

Jos A ei ole kumoutuva, se on validi.

Jos A on sekä toteutuva että kumoutuva, se on kontingentti.

Looginen seuraus ja ekvivalenssi

Kaava B on kaavan A *looginen seuraus*, joss $A \to B$ on validi, joss jokaisella L-mallilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktiolla s, jolla $\mathcal{M} \models_s A$, pätee myös $\mathcal{M} \models_s B$

Kaavat A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit*, joss ne ovat toistensa loogisia seurauksia, joss ne toteutuvat samoilla malleilla ja tulkintafunktioilla, joss $A \leftrightarrow B$ on validi.

Loogisia ekvivalensseja

- $\neg\forall xA$ och $\exists x\neg A$
- $\neg\exists xA$ och $\forall x\neg A$
- $\forall x(A \wedge B)$ och $\forall xA \wedge \forall xB$