Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

3.2.2014

Konjunktion päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi	
$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}$	$\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}$

Disjunktion päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\dfrac{A}{A \vee B}\vee\mathrm{T} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\vee\mathrm{T}$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\vee\mathrm{E}$

Negaation päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B \land \neg B\end{matrix}}{\neg A}\ \neg\mathrm{T}$$	$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathrm{E}$$

Implikaation eliminointi

Sääntö:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \to \mathsf{E}$$

Selitys:
Jos A pätee ja A:sta seuraa B, niin B pätee.

Viime luennon esimerkki

Onko propositiolause p_4 propositiolauseen

$$p_0 \wedge ((p_0 \rightarrow p_1) \wedge ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge ((p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_4))))$$

looginen seuraus?

Implikaation tuonti

Sääntö:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \to \mathsf{T},\ 1$$

Selitys:
Jos A:sta voidaan päätellä B, niin A:sta seuraa B.

Ekvivalenssin eliminointi

Säännöt:

$$\frac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B} \leftrightarrow \mathsf{E} \qquad\qquad \frac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A} \leftrightarrow \mathsf{E}$$

Selitys:
Ekvivalenssi toimii kuin kaksi implikaatiota.

Ekvivalenssin tuonti

Sääntö:

$$\dfrac{\begin{matrix} [A]^1 & & [B]^1 \\ \vdots & & \vdots \\ B & & A \end{matrix}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathrm{T},\ 1$$

Selitys:
Ekvivalenssi toimii kuin kaksi implikaatiota.

Päättelyn määritelmä

Määritelmä

Luonnollisten päättelyiden $\frac{\mathcal{P}}{A}$ joukko määritellään seuraavasti:

1. Triviaali päättely A (missä A on propositiolause) on päättely. Tässä $\mathcal{P} = \emptyset$ ja A on sekä oletus että johtopäätös.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

2. Jos $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ on päättely, jonka oletusten joukko on Σ_P ja johtopäätös A, ja $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ on päättely, jonka oletusten joukko on Σ_Q ja johtopäätös B, niin

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

on päättely, jonka oletusten joukko on $\Sigma_P \cup \Sigma_Q$ ja johtopäätös $A \wedge B$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

3. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ ja $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ ovat päättelyitä, joiden oletusten joukko on sama kuin alkuperäisellä päättelyllä.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

4. Jos $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{A \vee B}$ ja $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{B \vee A}$ ovat päättelyitä, joiden oletusten joukko on sama kuin alkuperäisellä päättelyllä.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

5. Jos $\dfrac{\mathcal{P}}{A \vee B}$, $\begin{matrix} A \\ \mathcal{Q} \\ C \end{matrix}$ ja $\begin{matrix} B \\ \mathcal{R} \\ C \end{matrix}$ ovat päättelyitä, joiden oletusten joukot ovat Σ_P, Σ_Q ja Σ_R, niin

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{P} \\ A \vee B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [A] \\ \mathcal{Q} \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [B] \\ \mathcal{R} \\ C \end{matrix}}{C}$$

on päättely, jonka oletusten joukko on $\Sigma_P \cup (\Sigma_Q \setminus \{A\}) \cup (\Sigma_R \setminus \{B\})$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

6. Jos $\begin{matrix} A \\ \mathcal{P} \\ B \end{matrix}$ on päättely, jonka oletusten joukko on Σ_P,

   niin

$$\dfrac{\begin{matrix} [A] \\ \mathcal{P} \\ B \end{matrix}}{A \to B}$$

   on päättely, jonka oletusten joukko on $\Sigma_P \setminus \{A\}$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

7. Jos $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \to B\end{matrix}$ ja $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}$ ovat päättelyitä, joiden oletusten joukot ovat Σ_P ja Σ_Q, niin $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \to B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ A\end{matrix}}{B}$ on päättely, jonka oletusten joukko on $\Sigma_P \cup \Sigma_Q$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

8. Jos $\begin{matrix} A \\ \mathcal{P} \\ B \end{matrix}$ ja $\begin{matrix} B \\ \mathcal{Q} \\ A \end{matrix}$ ovat päättelyitä, joiden oletusten joukot ovat Σ_P ja Σ_Q, niin $\dfrac{\begin{matrix} [A] \\ \mathcal{P} \\ B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [B] \\ \mathcal{Q} \\ A \end{matrix}}{A \leftrightarrow B}$ on päättely, jonka oletusten joukko on $(\Sigma_P \setminus \{A\}) \cup (\Sigma_Q \setminus \{B\})$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

9. Jos $\dfrac{\mathcal{P}}{A \leftrightarrow B}$, $\dfrac{\mathcal{Q}}{A}$ ja $\dfrac{\mathcal{R}}{B}$ ovat päättelyitä, niin

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{P} & \mathcal{Q} \\ A \leftrightarrow B & A\end{matrix}}{B} \quad \text{ja} \quad \frac{\begin{matrix}\mathcal{P} & \mathcal{R} \\ A \leftrightarrow B & B\end{matrix}}{A}$$

ovat päättelyitä, joiden oletusten joukot ovat $\Sigma_P \cup \Sigma_Q$ ja $\Sigma_P \cup \Sigma_R$.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

10. Jos $\begin{matrix} \mathcal{P} \\ \neg\neg A \end{matrix}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{P} \\ \neg\neg A \end{matrix}}{A}$ on päättely, jolla on samat oletukset kuin alkuperäisellä päättelyllä.

Päättelyn määritelmä (jatk.)

Määritelmä

11. Jos $\begin{array}{c} A \\ \mathcal{P} \\ B \wedge \neg B \end{array}$ on päättely, jonka oletusten joukko on Σ_P, niin

$$\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \mathcal{P} \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A}$$

on päättely, jonka oletusten joukko on $\Sigma_P \setminus \{A\}$.

Eheyslause

Olkoon Σ joukko propositiolauseita ja A propositiolause.

Jos $\Sigma \vdash A$, niin $\Sigma \Rightarrow A$ (eli A on Σ:n looginen seuraus).

Lause (Eheyslause)

Jos S on joukko propositiolauseita ja $S \vdash A$, niin $S \Rightarrow A$.

Eheyslauseen todistus

Osoitetaan induktiolla päättelyn rakenteen suhteen, että jos $\mathcal{P}$ on päättely, jonka oletukset ovat joukossa S ja jonka johtopäätös A on, niin $S \vdash A$, eli A on tosi kaikissa niissä totuusjakaumissa, joissa S:n lauseet ovat tosia.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

1. Jos $\mathcal{P}$ on triviaali päättely A, niin A on oletus. Siis A on tosi kaikissa totuusjakaumissa, joissa oletus A on tosi.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

2. Oletetaan induktio-oletuksena, että päättelyt $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ ja $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ toteuttavat eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

   Olkoon v totuusjakauma, jolla päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset ovat tosia. Tällöin kyseisellä totuusjakaumalla päättelyiden $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{Q}$ oletukset ovat tosia, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A) = 1$ ja $v(B) = 1$. Konjunktion totuusarvon määritelmän nojalla on $v(A \wedge B) = 1$, joten $\mathcal{R}$ toteuttaa eheyslauseen.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

3. Oletetaan, että päättely $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}$ toteuttaa eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely

$$\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$$

ja olkoon v totuusjakauma, jolla päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset ovat tosia. Tällöin kyseisellä totuusjakaumalla päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset ovat tosia, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A \wedge B) = 1$. Siispä $v(A) = 1$, joten $\mathcal{Q}$ toteuttaa eheyslauseen.

Vastaavasti osoitetaan, että $\cfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{matrix}}{B}$ toteuttaa eheyslauseen.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

4. Oletetaan, että päättely $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ toteuttaa eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{A \vee B}$$

ja olkoon v totuusjakauma, jolla $\mathcal{Q}$:n oletukset ovat tosia. Tällöin kyseisellä totuusjakaumalla päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset ovat tosia, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A) = 1$. Tällöin $v(A \vee B) = 1$, joten $\mathcal{Q}$ toteuttaa eheyslauseen.

Vastaavasti osoitetaan, että $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{B \vee A}$ toteuttaa eheyslauseen.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

5. Oletetaan, että päättelyt $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array}$, $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}$ ja $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{array}$ toteuttavat eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \mathcal{Q}'\\ C\end{array}}{C}$$

ja olkoon v totuusjakauma, jolla $\mathcal{R}$:n oletukset ovat tosia. Tällöin $\mathcal{P}$:n oletukset ovat tosia, joten induktio-oletuksen nojalla $v(A \vee B) = 1$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta: joko $v(A) = 1$ tai $v(A) = 0$.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

Jos $v(A) = 1$ niin totuusjakaumalla v päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset ovat tosia. Induktio-oletuksen nojalla on tällöin $v(C) = 1$.
Toisaalta, jos $v(A) = 0$, on oltava $v(B) = 1$, koska $v(A \vee B) = 1$. Tällöin totuusjakaumalla v päättelyn $\mathcal{Q}'$ oletukset ovat tosia ja induktio-oletuksen nojalla on $v(C) = 1$.
Siis joka tapauksessa $v(C) = 1$ ja päättely $\mathcal{R}$ toteuttaa eheyslauseen.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

6. Oletetaan, että päättely $\dfrac{\mathcal{P}}{\neg\neg A}$ toteuttaa eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$$

ja olkoon v totuusjakauma, jolla päättelyn $\mathcal{Q}$ oletukset ovat tosia. Tällöin päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset ovat tosia, joten $v(\neg\neg A) = 1$. Mutta tällöin $v(A) = 1$.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

7. Oletetaan, että päättely $\begin{matrix} A \\ \mathcal{P} \\ B \wedge \neg B \end{matrix}$ toteuttaa eheyslauseen. Olkoon $\mathcal{Q}$ päättely

$$\cfrac{\begin{matrix} [A] \\ \mathcal{P} \\ B \wedge \neg B \end{matrix}}{\neg A}$$

ja olkoon v totuusjakauma, jolla päättely $\mathcal{Q}$ oletukset ovat tosia. Jos nyt olisi $v(A) = 1$, olisivat kaikki päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset tosia. Mutta tällöin induktio-oletuksen nojalla olisi $v(B \wedge \neg B) = 1$, mikä on mahdotonta. Siksi on oltava $v(A) = 0$ ja siten $v(\neg A) = 1$.

Eheyslauseen todistus (jatk.)

8. $\rightarrow$ tuonti, HT.
9. $\rightarrow$ eleiminointi, HT.
10. $\leftrightarrow$ tuonti, HT.
11. $\leftrightarrow$ eliminoitni, HT.