Logiikka I

Propositiologiikan kertaus

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

21.2.2014

Propositiolauseet

Määritelmä

Propositiolause on äärellinen merkkijono, joka koostuu propositiosymboleista $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ konnektiiveista $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ sekä sulkumerkeistä '(', ')' ja on muodostettu seuraavien sääntöjen mukaan:

1. Propositiosymbolit $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ovat propostiolauseita.
2. Jos A on propositiolause, niin $\neg A$ on propositiolause.
3. Jos A ja B ovat propositiolauseita, niin $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat.
4. Vain merkkijonot, jotka on muodostettu sääntöjen 1-3 mukaan ovat propositiolauseita.

Induktiosta

Propositiolauseen määritelmä on esimerkki *induktiivisesta* määritelmästä, jossa annetaan

- lähtötason rakennusosaset
- konstruktioaskel tai -askeleet

Induktiotodistus

Kun todistetaan jokin ominaisuus induktiivisesti määritellylle joukolle, todistetaan, että

- lähtötason rakennusosasilla on kyseinen ominaisuus
- ominaisuus säilyy konstruktioaskeleissa

Esimerkki

Osoita, että kaikissa propositiolauseissa on sama määrä vasemmanpuoleisia ja oikeanpuoleisia sulkumerkkejä.

Alilauseet (tai alikaavat)

Määritelmä

Jos A on propositiosymboli, niin A:n ainoa alikaava on A itse.
Lauseen $\neg A$ alikaavat ovat $\neg A$ sekä A:n alikaavat.
Lauseen $A \wedge B$ alikaavat ovat $A \wedge B$ sekä A:n ja B:n alikaavat.
Lauseen $A \vee B$ alikaavat ovat $A \vee B$ sekä A:n ja B:n alikaavat.
Lauseen $A \rightarrow B$ alikaavat ovat $A \rightarrow B$ sekä A:n ja B:n alikaavat.
Lauseen $A \leftrightarrow B$ alikaavat ovat $A \leftrightarrow B$ sekä A:n ja B:n alikaavat.

Pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet

Propositiolauseen A *pääkonnektiivi* on se konnektiivi, jota viimeisenä on käytetty lauseen konstruktiossa induktiivisen määritelmän mukaan.

Propositiolauseen A *välittömät alilauseet* ovat ne alilauseet, jotka pääkonnektiivi yhdistää, täsmällisemmin:

Määritelmä

Lauseen $\neg A$ välitön alilause on A.
Lauseiden $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ välittömät alilauseet ovat A ja B.

Esimerkki

Mitkä ovat propositiolauseen

$$(p_0 \to p_1) \land (p_1 \to p_0)$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Esimerkki

Mitkä ovat propositiolauseen

$$(p_0 \to p_1) \wedge (p_1 \to p_0)$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Mitkä ovat propositiolauseen

$$p_{56}$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Semantiikka

Määritelmä

Totuusjakauma on funktio $v : \{p_n | n \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$.

Totuusjakauma v indusoi *totuusarvon* $v(A)$ kaikille propositiolauseille A (induktiivinen määritelmä, joka perustuu konnektiivien totuusarvoille:)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Esimerkki

Laadi totuustaulu propositiolauseelle

$$p_1 \to (p_0 \lor p_1)$$

Propositiologiikan lauseet ovat

- toteutuvia, jos niiden totuusarvo jollakin totuusjakaumalla on 1
- kumoutuvia, jos niiden totuusarvo jollakin totuusjakaumalla on 0

- tautologioita, jos niiden totuusarvot kaikilla totuusjakaumilla on 1
- ristiriitoja, jos niiden totuusarvot kaikilla totuusjakaumilla on 0
- kontingentteja, jos ne eivät ole tautologioita eivätkä ristiriitoja

Looginen seuraus

Propositiolause B on propositiolauseen A *looginen seuraus*, $A \Rightarrow B$, jos jokaisella totuusjakaumalla v, jolla $v(A) = 1$ on myös $v(B) = 1$. Yhtäpitävästi lause $A \rightarrow B$ on tautologia.
Propositiolause B on propositiolausejoukon Σ looginen seuraus, $\Sigma \Rightarrow B$, jos jokaisella totuusjakaumalla v, jolla $v(A) = 1$ kaikilla $A \in \Sigma$ pätee myös $v(B) = 1$.
Miksi jälkimmäisessä tapauksessa ei kuitenkaan voi puhua tautologiasta?

Looginen ekvivalenssi

Propositiolauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit*, $A \Leftrightarrow B$, jos kaikilla totuusjakaumilla v pätee $v(A) = v(B)$. Yhtäpitävästi lause $A \leftrightarrow B$ on tautologia.

Totuusfunktio

Määritelmä

Totuusfunktio on funktio $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, jossa $n \in \mathbb{N}$.

- konnektiivit ovat totuusfunktioita
- jokaista propositiloausetta A vastaa totuusfunktio f_A
- jokaista totuusfunktiota voidaan esittää propositiolauseen avulla

Esimerkki

Mikä on propositiolausetta

$$p_0 \to (p_1 \wedge p_2)$$

vastaava totuusfunktio?

DNF-menetelmä

Jokaista riviä kohden, jossa f saa arvon 1, laaditaan propositiolause, joka on tosi tasan silloin, kun $v(p_0) = x$, $v(p_1) = y$ ja $v(p_2) = z$.

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

Disjunktio

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee$$
$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

on tosi tasan silloin kun $f(v(p_0), v(p_1), v(p_2)) = 1$.

Täydelliset konnektiivijoukot

Konnektiivijoukko on täydellinen (tai universaalinen), jos propositiolauseilla, joissa esiintyy vain joukon konnektiiveja, voidaan esittää kaikki totuusfunktiot. DNF-menetelmän nojalla $\{\vee, \wedge, \neg\}$ on täydellinen.

Luonnollinen päättely

- formaali päättelymetodi
- perustuu konnektiivien tuonti- ja eliminointisääntöihin
- *oletuksista* päätellään *johtopäätös*
- oletusjoukko voi olla tyhjä

Konjunktion päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi	
$\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge\mathrm{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge\mathrm{E}$	$\dfrac{A \wedge B}{B} \wedge\mathrm{E}$

Disjunktion päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\dfrac{A}{A \lor B}\lor\mathrm{T}$ $\qquad$ $\dfrac{B}{A \lor B}\lor\mathrm{T}$	$\dfrac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\lor\mathrm{E}$

Negaation päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\mathrm{T}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,\neg\mathrm{E}$

Implikaation päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\to\mathrm{T}$$	$$\dfrac{A \to B \qquad A}{B}\to\mathrm{E}$$

Ekvivalenssin päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\dfrac{\begin{array}{cc}[A] & [B] \\ \vdots & \vdots \\ B & A\end{array}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathrm{T}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad A}{B} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \qquad B}{A} \leftrightarrow$

Eheyslause

Lause

Jos Σ on joukko propositiolauseita, A on propositiolause ja on olemassa luonnollinen päättely, jonka oletukset ovat joukossa Σ ja jonka johtopäätös on A, niin A on Σ:n looginen seuraus.
Lyhyemmin

$$Jos\ \Sigma \vdash A\ niin\ \Sigma \Rightarrow A.$$

Esimerkki

Miten osoitetaan, että

$$p_0 \wedge p_1 \vdash p_0?$$

Miten osoitetaan, että

$$p_0 \nvdash p_0 \wedge p_1?$$

Semanttiset puut

Konjunktio	$A \land B$ $\mid$ A $\mid$ B	$\neg(A \land B)$ $\neg A \quad \neg B$
Disjunktio	$A \lor B$ $A \quad B$	$\neg(A \lor B)$ $\mid$ $\neg A$ $\mid$ $\neg B$

Semanttiset puut

Negaatio

$$\begin{array}{ccc} \neg\neg A & A & \neg A \\ | & | & | \\ A & \neg A & A \\ & | & | \\ & \times & \times \end{array}$$

Semanttiset puut

Implikaatio	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \to B} \\ \neg A & B \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ \vert \\ A \\ \vert \\ \neg B \end{array}$
Ekvivalenssi	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ A & \neg A \\ \vert & \vert \\ B & \neg B \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ A & \neg A \\ \vert & \vert \\ \neg B & B \end{array}$

Semanttinen todistus

- Mitä semanttisesta puusta nähdään?
- Mikä on semanttinen todistus?

Semanttinen todistus

- Mitä semanttisesta puusta nähdään?
- Mikä on semanttinen todistus?

Anna semanttinen todistus propositiolauseelle

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \land (B \to A))$$