

Logiikka I

Propositiologiikan kertaus

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

21.2.2014

Propositiolauseet

Määritelmä

Propositiolause on äärellinen merkkijono, joka koostuu propositiosymboleista p_0, p_1, p_2, \dots , konnektiiveista $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ sekä sulkumerkeistä $'(, ')'$ ja on muodostettu seuraavien sääntöjen mukaan:

- 1 Propositosymbolit p_0, p_1, p_2, \dots ovat propositiolauseita.
- 2 Jos A on propositiolause, niin $\neg A$ on propositiolause.
- 3 Jos A ja B ovat propositiolauseita, niin $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat.
- 4 Vain merkkijonot, jotka on muodostettu sääntöjen 1-3 mukaan ovat propositiolauseita.

Induktiosta

Propositiolauseen määritelmä on esimerkki *induktiivisesta* määritelmästä, jossa annetaan

- lähtötason rakennusosaset
- konstruktioaskel tai -askeleet

Induktiotodistus

Kun todistetaan jokin ominaisuus induktiivisesti määritellylle joukolle, todistetaan, että

- lähtötason rakennusosalla on kyseinen ominaisuus
- ominaisuus säilyy konstruktiioaskeleissa

Esimerkki

Osoita, että kaikissa propositiolauseissa on sama määrä vasemmanpuoleisia ja oikeanpuoleisia sulkuverkkejä.

Alilauseet (tai alikaavat)

Määritelmä

Jos A on propositiosymboli, niin A :n ainoa alikaava on A itse.

Lauseen $\neg A$ alikaavat ovat $\neg A$ sekä A :n alikaavat.

Lauseen $A \wedge B$ alikaavat ovat $A \wedge B$ sekä A :n ja B :n alikaavat.

Lauseen $A \vee B$ alikaavat ovat $A \vee B$ sekä A :n ja B :n alikaavat.

Lauseen $A \rightarrow B$ alikaavat ovat $A \rightarrow B$ sekä A :n ja B :n alikaavat.

Lauseen $A \leftrightarrow B$ alikaavat ovat $A \leftrightarrow B$ sekä A :n ja B :n alikaavat.

Pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet

Propositiolauseen A *pääkonnektiivi* on se konnektiivi, jota viimeisenä on käytetty lauseen konstruktiossa induktiivisen määritelmän mukaan.

Propositiolauseen A *välittömät alilauseet* ovat ne alilauseet, jotka pääkonnektiivi yhdistää, täsmällisemmin:

Määritelmä

Lauseen $\neg A$ välitön alilause on A .

Lauseiden $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ja $A \leftrightarrow B$ välittömät alilauseet ovat A ja B .

Esimerkki

Mitkä ovat propositiolauseen

$$(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow p_0)$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Esimerkki

Mitkä ovat propositiolauseen

$$(p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow p_0)$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Mitkä ovat propositiolauseen

$$p_{56}$$

alilauseet, pääkonnektiivi ja välittömät alilauseet?

Semantiikka

Määritelmä

Totuusjakauma on funktio $v : \{p_n | n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{0, 1\}$.

Totuusjakauma v indusoi *totuusarvon* $v(A)$ kaikille propositionaalisille A (induktiivinen määritelmä, joka perustuu konnektiivien totuusarvoille:)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Esimerkki

Laadi totuustaulu propositiolauseelle

$$p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$$

Propositiologiikan lauseet ovat

- toteutuvia, jos niiden totuusarvo jollakin totuusjakaumalla on 1
- kumoutuvia, jos niiden totuusarvo jollakin totuusjakaumalla on 0
- tautologioita, jos niiden totuusarvot kaikilla totuusjakaumilla on 1
- ristiriitoja, jos niiden totuusarvot kaikilla totuusjakaumilla on 0
- kontingentteja, jos ne eivät ole tautologioita eivätkä ristiriitoja

Looginen seuraus

Propositiolause B on propositiolauseen A *looginen seuraus*, $A \Rightarrow B$, jos jokaisella totuusjakaumalla v , jolla $v(A) = 1$ on myös $v(B) = 1$. Yhtäpitävästi lause $A \rightarrow B$ on tautologia.

Propositiolause B on propositiolausejoukon Σ looginen seuraus, $\Sigma \Rightarrow B$, jos jokaisella totuusjakaumalla v , jolla $v(A) = 1$ kaikilla $A \in \Sigma$ pätee myös $v(B) = 1$.

Miksi jälkimmäisessä tapauksessa ei kuitenkaan voi puhua tautologiasta?

Looginen ekvivalenssi

Propositiolauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit*, $A \Leftrightarrow B$, jos kaikilla totuusjakaumilla v pätee $v(A) = v(B)$. Yhtäpitävästi lause $A \leftrightarrow B$ on tautologia.

Totuusfunktio

Määritelmä

Totuusfunktio on funktio $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, jossa $n \in \mathbb{N}$.

- konnektiivit ovat totuusfunktioita
- jokaista propositioloausetta A vastaa totuusfunktio f_A
- jokaista totuusfunktioita voidaan esittää propositiolauseen avulla

Esimerkki

Mikä on propositiolausetta

$$p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

vastaava totuusfunktio?

DNF-menetelmä

Jokaista riviä kohden, jossa f saa arvon 1, laaditaan propositionilause, joka on tosi tasan silloin, kun $v(p_0) = x$, $v(p_1) = y$ ja $v(p_2) = z$.

x	y	z	$f(x, y, z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

x	y	z	$f(x, y, z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

Disjunktio

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

on tosi tasan silloin kun $f(v(p_0), v(p_1), v(p_2)) = 1$.

Täydelliset konnektiivijoukot

Konnektiivijoukko on täydellinen (tai universaalinen), jos proposioliouseilla, joissa esiintyy vain joukon konnektiiveja, voidaan esittää kaikki totuusfunktiot. DNF-menetelmän nojalla $\{\vee, \wedge, \neg\}$ on täydellinen.

Luonnollinen päättely

- formaali päättelymetodi
- perustuu konnektiivien tuonti- ja eliminointisääntöihin
- *oletuksista* päätellään *johtopäätös*
- oletusjoukko voi olla tyhjä

Konjunktio päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge T$	$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$

Disjunktio päätelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\frac{A}{A \vee B} \vee \text{T} \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee \text{T}$	$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee \text{E}$

Negaation päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A} \neg_T$	$\frac{\neg\neg A}{A} \neg_E$

Implikaation päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow T$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \rightarrow E$

Ekvivalenssin päättelysäännöt

Tuonti	Eliminointi
$\frac{\begin{array}{c} [A] \quad [B] \\ \vdots \quad \vdots \\ B \quad A \end{array}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow T$	$\frac{A \leftrightarrow B \quad A}{B} \leftrightarrow E \qquad \frac{A \leftrightarrow B \quad B}{A} \leftrightarrow E$

Eheyslause

Lause

Jos Σ on joukko propositiolauseita, A on propositiolause ja on olemassa luonnollinen päättely, jonka oletukset ovat joukossa Σ ja jonka johtopäätös on A , niin A on Σ :n looginen seuraus.

Lyhyemmin

$Jos \Sigma \vdash A$ niin $\Sigma \Rightarrow A$.

Esimerkki

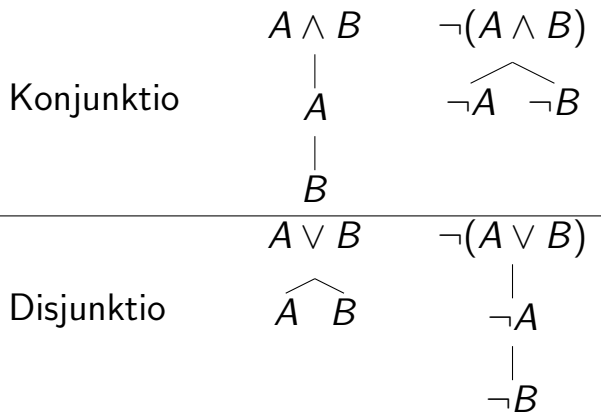
Miten osoitetaan, että

$$p_0 \wedge p_1 \vdash p_0?$$

Miten osoitetaan, että

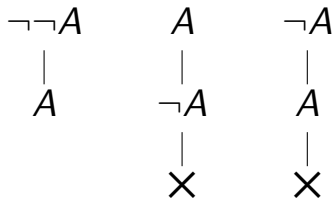
$$p_0 \not\vdash p_0 \wedge p_1?$$

Semanttiset puut

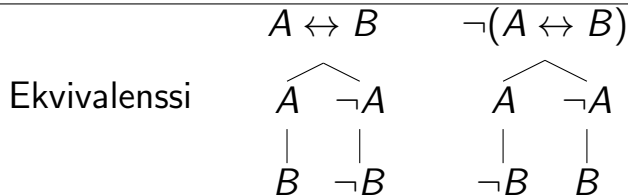
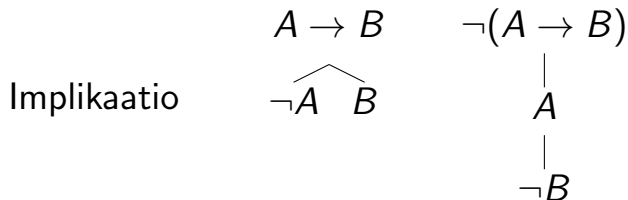


Semanttiset puut

Negaatio



Semanttiset puut



Semanttinen todistus

- Mitä semanttisesta puusta nähdään?
- Mikä on semanttinen todistus?

Semanttinen todistus

- Mitä semanttisesta puusta nähdään?
- Mikä on semanttinen todistus?

Anna semanttinen todistus propositiolauseelle

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$